

2008年度 修士論文

宇宙における熱制動放射の研究

平成21年3月14日

物理学専攻
(学籍番号: B0776017)

高橋啓吾

上智大学大学院 理工学研究科

目次

| | | |
|-------|---|-----|
| 第1章 | 序論 | 1 |
| 1.1 | 宇宙プラズマ | 1 |
| 1.1.1 | 宇宙とプラズマ | 1 |
| 1.1.2 | 銀河団プラズマ | 2 |
| 1.1.3 | ブラックホール近傍プラズマ | 6 |
| 1.2 | X線放射 | 8 |
| 1.2.1 | 観測 | 8 |
| 1.2.2 | 熱制動放射 | 8 |
| 第2章 | 熱制動放射研究の歴史 | 9 |
| 2.1 | 導入 | 9 |
| 2.1.1 | Gaunt Factor | 9 |
| 2.1.2 | Elwert Factor | 10 |
| 2.1.3 | Photon Production Rate | 10 |
| 2.1.4 | Emissivity | 11 |
| 2.2 | 電子 - イオン熱制動放射 | 13 |
| 2.2.1 | 概要 | 13 |
| 2.2.2 | 非相対論領域 | 13 |
| 2.2.3 | 中間領域 | 19 |
| 2.2.4 | 超相対論領域 | 26 |
| 2.3 | 電子 - 電子熱制動放射 | 30 |
| 2.3.1 | 概要 | 30 |
| 2.3.2 | 非相対論領域 | 30 |
| 2.3.3 | 中間領域 | 38 |
| 2.3.4 | 超相対論領域 | 47 |
| 第3章 | 研究内容 | 52 |
| 3.1 | 理論 | 52 |
| 3.1.1 | 散乱断面積 | 52 |
| 3.2 | 数値計算 | 60 |
| 3.2.1 | 電子 - 電子熱制動放射における PPR | 60 |
| 3.2.2 | 電子 - 電子熱制動放射における Emissivity | 80 |
| 3.3 | Fitting | 81 |
| 3.3.1 | 領域 I ($1\text{keV} \leq k_B T \leq 300\text{keV}$) | 81 |
| 3.3.2 | 領域 II ($300\text{keV} \leq k_B T \leq 7\text{MeV}$) | 109 |
| 第4章 | まとめ | 121 |
| 4.1 | 総括 | 121 |
| 4.2 | Fitting 比較 | 122 |
| 4.3 | 応用例 | 122 |
| 4.4 | 今後に向けて | 123 |

| | |
|--------------------------------|-----|
| 付録 A Trace 計算 | 132 |
| 付録 B 電子 - イオン熱制動放射超相対論近似の導出 | 156 |
| 付録 C 電子 - 電子熱制動放射超相対論近似の導出 | 161 |
| 付録 D PPR 計算プログラム | 167 |
| 付録 E Emissivity 計算プログラム | 181 |
| 付録 F PPRFitting 計算プログラム | 183 |
| 付録 G EmissivityFitting 計算プログラム | 191 |

第1章 序論

1.1 宇宙プラズマ

1.1.1 宇宙とプラズマ

宇宙空間には至る所にプラズマが存在している。例えば、我々の住む太陽系が属する天の川銀河の中心部をX線で観測すると、全体を覆っている光を観測する事が出来る。これは銀河を覆うプラズマからの放射光である。更に、銀河の中心部いて座にはA*というブラックホールの存在が観測されている。その為、中心部ではより強い放射光を観測することができる。一つ一つの点として光っているのは恒星や遠くの銀河である。このように、X線観測を用いると、可視光ではわからない多くの情報を得る事が出来る。本研究ははこれらプラズマ中の現象である制動放射についての研究である。



図 1.1: 天の川銀河中心部

1.1.2 銀河団プラズマ

宇宙に存在する星は、それぞれ独立に存在するのではなく集団を形成している。例えば、我々の住む地球は、太陽を中心とした太陽系を成している。更に、その太陽系はより大きな集団である天の川銀河の端に位置し、重力的にまとまった集団を形成している。こういった集団を銀河と呼ぶ。特に、我々の住む銀河系を天の川銀河と呼ぶ。銀河はハッブル分類によって、大きく分けて、楕円銀河・レンズ状銀河・渦巻銀河・棒渦巻銀河・不規則銀河といった分類がなされている。近年の観測によると天の川銀河は中心部にバルジと呼ばれるふくらみを持ち、その周囲に渦状腕を持つ事から、ハッブル分類を適用すると棒渦巻銀河である説が有力となっている。また、天の川銀河の場合、アンドロメダ銀河や大小マゼラン星雲などと共に1つの局所銀河群を形成している。この局所銀河群を天の川銀河団と呼ぶ。天の川銀河団には、約40以上の銀河の所属が確認されており、天の川銀河と最も近い銀河はおおいぬ座矮小銀河である。逆に、最も遠い銀河はGR8銀河であり、その距離は約800万光年である。そういった銀河によって天の川銀河団は形成されている。また、一般に銀河団は数十から数千程度の銀河によって形成され、太陽質量の $10^{14} \sim 10^{15}$ 倍、100万パーセクにもなる大きさを持っている。これらの銀河団・銀河群は連なり、1億光年程度より大きな構造を形成している。この構造集団を超銀河団と呼び、宇宙はこれら超銀河団によって構成されている。

このような構造はどのように形成されたのだろうか。その解明には宇宙の進化を紐解く必要がある。まず、宇宙は137億年前の超高温・超高密度の状態からの爆発によって始まり、膨張したと考えられている。この爆発をビッグバンと呼ぶ。ビッグバンによって作られた水素やヘリウム等の軽元素は、わずかな密度揺らぎによって重力的な不均等を起こし、次第に集団を形成していく。その集団が今日、我々が星と呼ぶものの元となっている。星達はまた、その重力によって集団を作っていく。例えば、地球と太陽の関係で言えば、太陽系を作っていくのである。この集団もまた、重力によって支配された集団を形成していき、銀河、銀河団、超銀河団へと進化し、遥かに大きなスケールの集団を形成していった。ビッグバン理論に基づくと、このようなプロセスによって銀河団などの集団は形成されていったと考えられている。

銀河団の組成について述べていこう。大きく分けて、銀河団は銀河・銀河団プラズマ・ダークマターの3つによって構成されている。まず、我々が住んでいる地球のような惑星、あるいは、太陽のような恒星は、この分類法を用いると、銀河に分類される。銀河団における銀河の組成比率は数%である。次に、銀河団プラズマ。銀河団全体を覆うように存在するプラズマである。これについては後で詳しく述べる。割合としては約20%であると報告されている。最後に、ダークマターについて述べる。観測によって、銀河・銀河団プラズマの質量の和が、銀河団全質量よりも小さいという事が明らかにされている。この事から、銀河団は銀河・銀河団プラズマだけでなく、暗黒物質と呼ばれるダークマターが存在していると考えられている。また、銀河団の構成要素としてはダークマターが最も多く、全体の70%以上を占めている。銀河団は主に上記3要素によって構成されている。

今回、我々は銀河団を構成する銀河・銀河団プラズマ・ダークマターの3つの要素のうち、銀河団プラズマに着目した。その存在は1970年代、X線観測衛星によって発見されている。これまでの観測によると、同じ銀河団でもX線と可視光それぞれで観測すると、結果が大きく異なる事がわかっている。可視光で観測した場合、1つ1つの銀河がはっきり映し出され、銀河と銀河の間は真っ暗な空間になっている。しかし、X線で観測した場合、銀河の間にも物質の存在が観測され、全体にもやのかかったガス状の物質に覆われている事がわかる。このガス状の物質が銀河団

プラズマである。銀河団はプラズマによって全体を覆われており、観測によって数 keV という高温の状態である事が示されている。代表的な観測例を挙げた。また、その密度は 1ℓ に 1 個程度だが、銀河団の巨大さを考慮すると、銀河団プラズマ全体で大きな質量を持っている事になる。その事を考慮した上で、銀河団中の銀河の質量と銀河団プラズマの質量を比較すると、天の川銀河団の場合、銀河団プラズマ質量の方が 1 桁程大きい。この結果から、銀河団を可視光で見た場合、あたかも銀河が主要素であるように見えるが、実際は銀河団プラズマやその他の成分の方が遥かに大きな要素を占めているという事がわかる。また、高温プラズマ内部では電子が温度の $1/2$ 乗の速度で不規則に運動している。それらの電子が周囲のイオンや電子に衝突・散乱を起こす事で、光子が放出される ($e+e \rightarrow e+e+\gamma$)。この放射光子が銀河団プラズマを覆うガス状光の正体であり、X 線天文衛星ではこれらの観測を行っている。この放射過程を熱制動放射と呼ぶ。特に、電子とイオンの散乱過程を電子 - イオン熱制動放射、電子 - 電子熱制動放射と呼ぶ。

| 銀河団 | $k_B T$ (keV) |
|---------------------------|---------------|
| A665 _[6,15] | 8.18 ± 0.53 |
| A754 _[6,20] | 10.00 ± 0.3 |
| A2163 _[3,6,21] | 12.4 ± 0.70 |
| A2218 _[6,19] | 7.51 ± 0.45 |
| A2319 _[4,6] | 10.1 ± 0.4 |
| 1E 0657-56 _[6] | 13.9 ± 0.7 |

表 1.1: 銀河団温度の一例

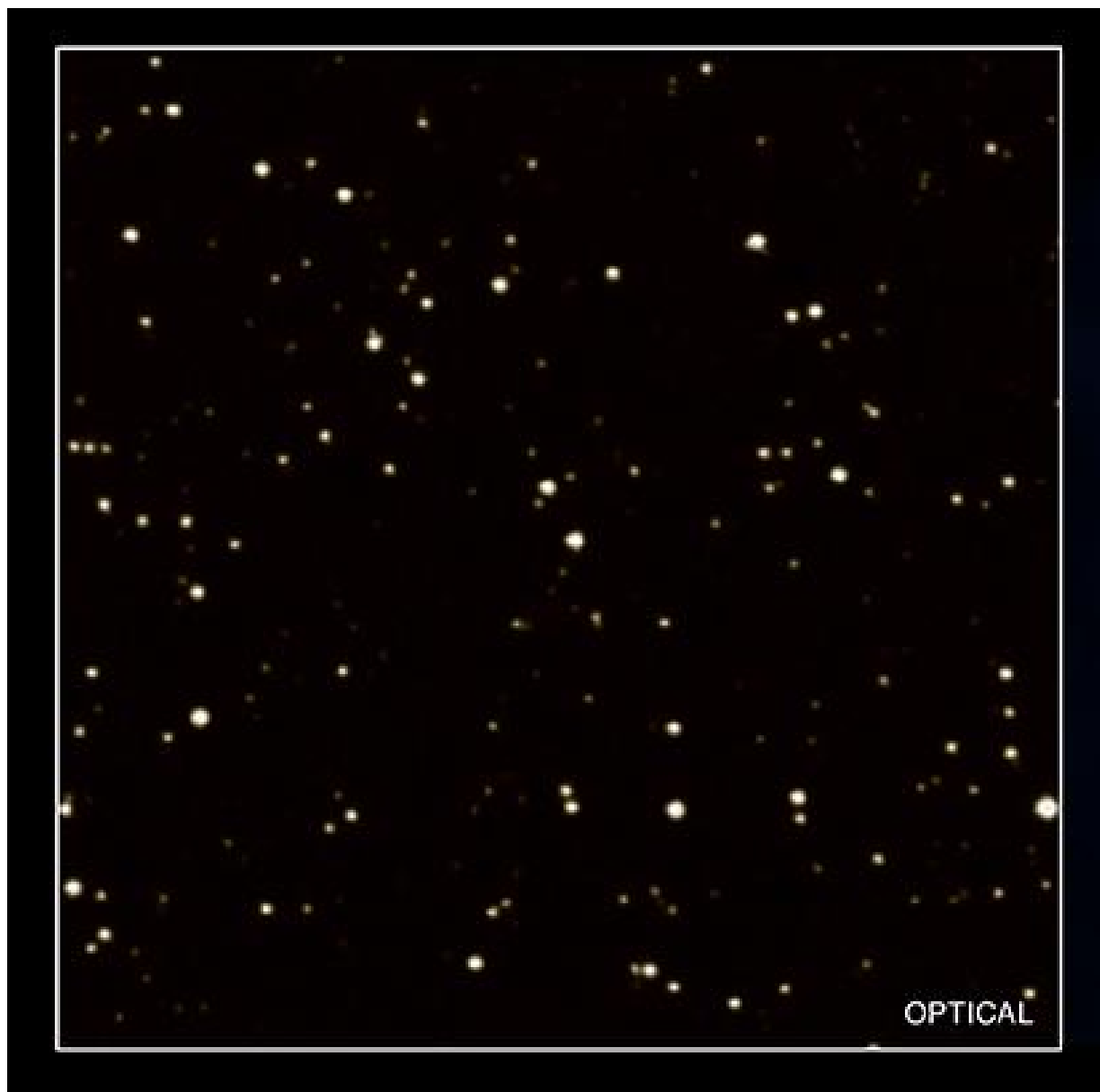


図 1.2: 銀河 3C438 を中心とする銀河団 可視光による撮影

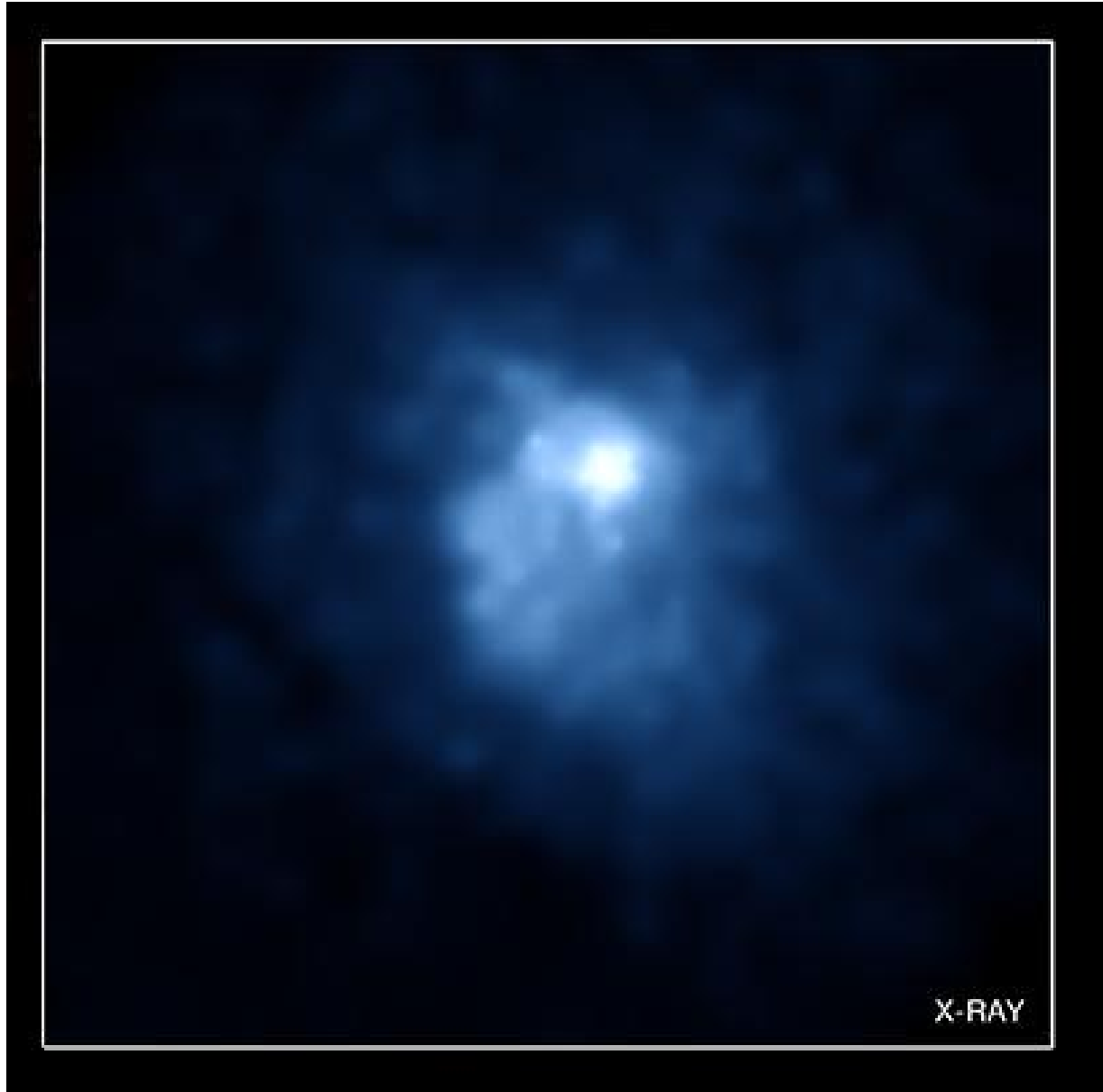


図 1.3: 銀河 3C438 を中心とする銀河団 X線による撮影

1.1.3 ブラックホール近傍プラズマ

ここでは、高エネルギープラズマを持ち、相対論効果の強いブラックホール近傍プラズマについて述べる。ブラックホールは大質量を持つ星が一生の最期にいきつく天体と考えられている。そのこの至るまでのメカニズムについて触れていきたい。星間ガスから生まれたばかりの星の組成は、水素が最も多く、次にヘリウムが多い。より重い重元素も存在するが、水素・ヘリウムに比べ遥かに少ない。この星が重力収縮によってエネルギーを開放し、温度が上昇すると水素燃焼が始まる。この反応により、4個の水素原子核が融合し、1個のヘリウムとなる。この過程を繰り返す事で中心にヘリウムのコアができ、次第に大きく成長していく。ヘリウムコアがある程度大きくなると、コアは自身を支えきれなくなり、収縮が始まる。太陽質量の10倍以上の星の場合、この収縮による重力エネルギーの解放と核燃焼が繰り返されると、最安定な核である鉄のコアが形成されるまで核燃焼が続く。結果的に星は中心に鉄のコアがあり、その周囲をより軽い元素の層が何重にも取り囲む多重構造となる。鉄のコアは強力な電子の縮退圧で支えられているが、鉄のコアの温度が上昇すると吸熱反応を起こす。この事により、星の温度が下がる。この事に伴い、熱的圧力や電子縮退圧も急激に下がり、自身の重さを支える事ができなくなり、重力崩壊を起こす。更に、原子核の密度に達しても重力崩壊がとどまらなかった場合、収縮し星はブラックホールとなる。

また、ブラックホールには2つの種類が存在し、先ほど述べたもの以外にも大質量ブラックホールがある。これは、宇宙に存在する異常に明るい銀河中心核の中に存在すると考えられている。その質量は太陽の100万倍～1億倍に達し、周囲をガスが円盤状に回転していると考えられている。例えば、我々の住む銀河系の中心部に存在する大質量ブラックホール A* は太陽質量の370万倍である。他にも M106 銀河の中心部には太陽質量の3600万倍もの大質量ブラックホールが観測され、21世紀初頭までに多くの銀河の中心部に大質量ブラックホールの存在が観測されている。このような大質量ブラックホール形成シナリオについては未解明の部分が多い。一つのシナリオとしては以下のものが考えられている。銀河同士の近接遭遇や衝突などによって、銀河内部で爆発的な星形成が起こり、これによって若く、密度の高い星団が大量にできる。このような星団には重い星が大量に含まれる為、高密度な環境ではこのような星同士が合体し、より大きな星となる。大きな星はその重力によりより合体しやすくなるので、ますます大きな星が生まれやすくなる。このようにして作られた重い星は寿命が非常に短いので早い時期に超新星爆発を起こし、太陽の数十倍から数百倍の質量を持つブラックホールが誕生する。またそれらが合体を繰り返し、大質量ブラックホールができる。このようなシナリオによって大質量ブラックホールが形成されているというものもあるが、正確なシナリオについてはまだわかっていない。このシナリオを明らかにする為に、中間質量ブラックホールと呼ばれるものの観測が行われている。これは、上記のシナリオの合体過程のブラックホールであり、X線観測衛星によって発見・観測がなされている。その為、今後の観測データ解析によって形成のシナリオは明らかにされていくだろう。

こういったブラックホールや大質量ブラックホールの近傍にもプラズマが存在する。例えば、Cygnus X-1の観測では、数 MeV 程度までのスペクトルが観測されている。このことから、ブラックホール近傍には相対論効果の強い超高温プラズマが存在する事がわかる。

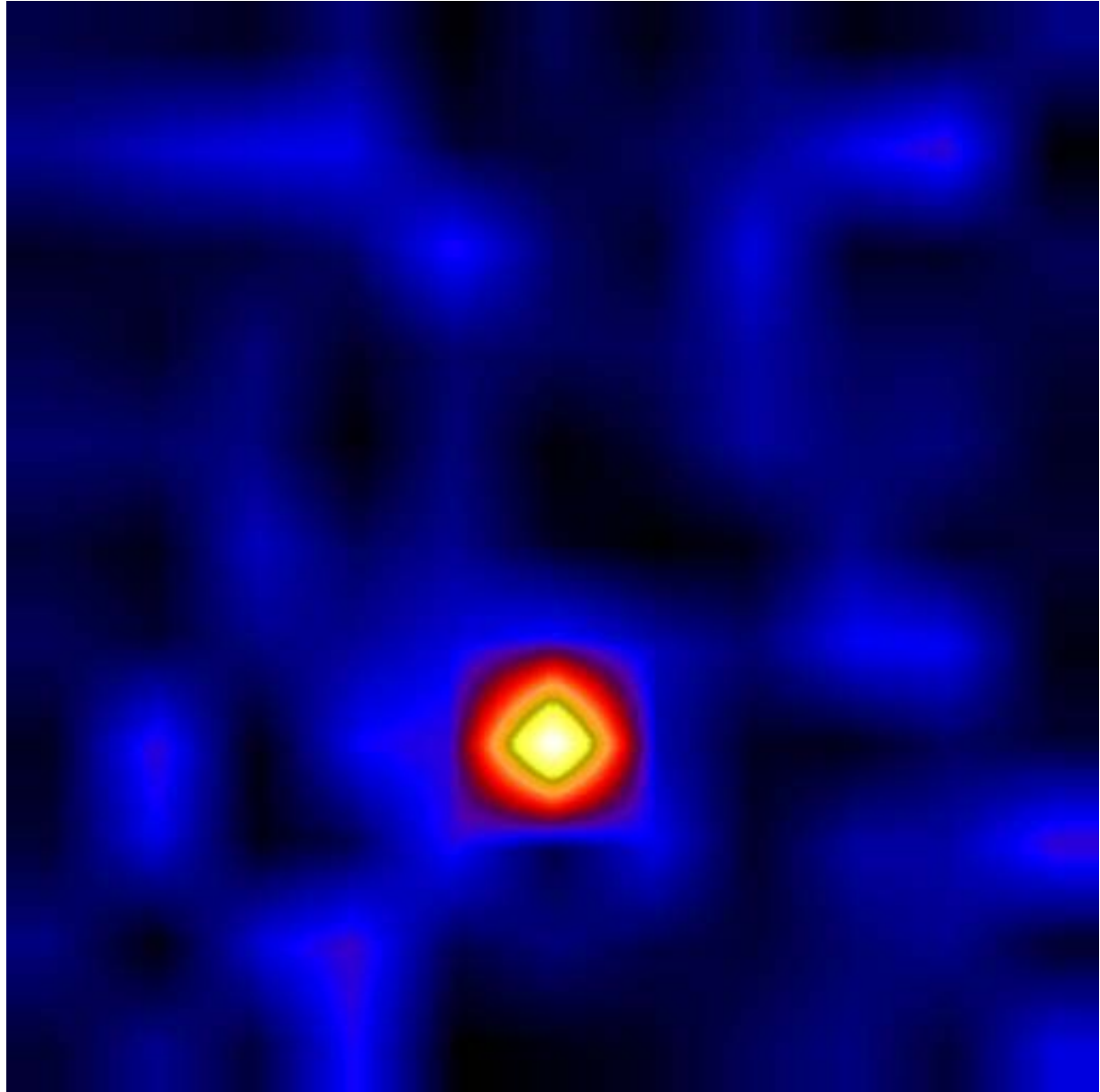


図 1.4: Cygnus X-1 X 線による観測

1.2 X線放射

1.2.1 観測

近年、X線観測技術は飛躍的に進歩し、Chandra(NASA)・XMM-Newton(ESA)・SUZAKU(JAXA)等のX線天文衛星によって観測が行われている。それぞれ特徴として、Chandraは空間分解能の高さ、XMM-Newtonはスペクトル分解能の高さが挙げられる。その為、Chandraの観測から温度分布が、XMM-Newtonの観測から組成元素の構成が詳しく解析されている。また、現在最も多くの論文で引用・運用されている衛星は2005年に打ち上げられたSUZAKUである。SUZAKUは日本第5機目のX線天文衛星であり、高温プラズマの観測・遠方銀河団の観測による宇宙進化データの提供・ブラックホール候補天体や、活動銀河核の観測等を目的としている。観測可能エネルギー帯域は従来の衛星が10keV程度であるのに対し、SUZAKUは700keVまでと、幅広い帯域での観測が可能である。また、最近の観測では、RXJ1347銀河団から3億度という超高温銀河団プラズマが観測されている。一般的な銀河団温度と比べると数倍高い値である。こういった新たな観測結果によって、銀河団について徐々に理解を深めている。

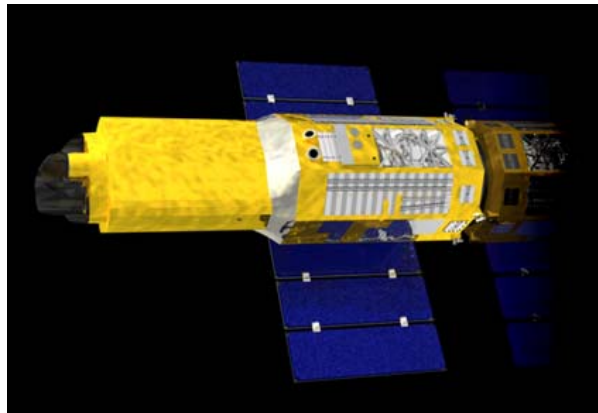


図 1.5: X線天文衛星 SUZAKU イメージ図

1.2.2 熱制動放射

本研究では、 $e+e \rightarrow e+e+\gamma$ という現象を扱う。これらの現象は対象の密度が薄い状態でよく観測することが出来る。それは、光子が電子やイオンと相互作用を起こしやすいという特性を持っているという事による。密度の高い対象では、光子が相互作用を起こし、対象外部に放射されにくい。こういった対象の元では、相互作用を起こしにくいニュートリノでの制動放射を観測することによって、対象の状態を測る事が出来る。高密度天体においてはニュートリノ制動放射の観測が有用である。様々な対象からの放射を観測することは、対象内部の状態を観測している事と同義である。遥か遠い宇宙のプラズマや天体内部で起こっている現象が、放射の観測によって解明出来るという意味で、制動放射を観測する事は非常に有用である。今回特に熱制動放射としている理由は、対象が熱平衡にあるという条件の下で計算を行っている事が挙げられる。その為、種々の温度分布関数にしたがっている。今回対象とした銀河団プラズマやブラックホール近傍プラズマは熱平衡状態にあるので、熱平衡状態の条件下で研究を進めた。

第2章 熱制動放射研究の歴史

2.1 導入

2.1.1 Gaunt Factor

熱制動放射放射率を計算する際に簡略化の為、Gaunt Factor という値を用いる。Gaunt Factor とは、それぞれの場合で求めた放射率を、Kramers によって半古典的に求められた放射率で割った無次元量である。

$$\langle W(\omega) \rangle d\omega = g(\theta_e, \omega) \langle W(\omega) \rangle_K d\omega \quad (2.1)$$

この $g(\theta_e, \omega)$ が Gaunt Factor である。ここで、Kramers による半古典的放射率は

$$\begin{aligned} \langle W(\omega) \rangle_K d\omega &= \frac{2^5 \pi e^6}{3 h m c^3} n_1 n_2 Z_j^2 \left(\frac{2 \pi k_B T}{3 m} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-u} \frac{\hbar}{k_B T} d\omega \\ &= 1.426 \times 10^{-27} [n_e (cm)^{-3}] [n_j (cm)^{-3}] Z_j^2 [T (K)]^{\frac{1}{2}} e^{-u} du [ergs^{-1} cm^{-3}] \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$u = \frac{\hbar \omega}{k_B T} \quad (2.3)$$

$$\theta_e = \frac{k_B T}{m c^2} \quad (2.4)$$

と表す。一方、この Gaunt Factor と後述する Photon Production Rate は以下の関係を持つ。電子 - 電子熱制動放射の場合を考え、

$$\begin{aligned} \hbar \omega P_{ee}(\omega, \theta_e) &= \alpha \sigma_T n_e^2 m c^3 e^{-u} \theta_e^{\frac{1}{2}} G(u, \theta_e) \left(\frac{m c^2}{\hbar} \right) \theta_e du \\ &= \alpha \sigma_T n_e^2 m c^3 e^{-u} \theta_e^{\frac{3}{2}} G(u, \theta_e) du \\ &= \frac{\sqrt{3\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{n_e}{n_j Z_j^2} \left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}} \alpha \sigma_T n_e n_j Z_j^2 m c^3 \theta_e^{\frac{1}{2}} e^{-u} \theta_e G(u) du \right] \\ &= \frac{n_e}{n_j Z_j^2} \left[\sqrt{\frac{3\pi}{8}} \theta_e G(u, \theta_e) \right] \langle W(\omega) \rangle_K d\omega \\ &= \frac{n_e}{n_j Z_j^2} \theta_e \left[\sqrt{\frac{3\pi}{8}} G(u, \theta_e) \right] \langle W(\omega) \rangle_K d\omega \end{aligned} \quad (2.5)$$

以上より

$$g_{ee}(\theta_e, \omega) = \frac{n_e}{n_j Z_j^2} \theta_e \sqrt{\frac{3\pi}{8}} G(u, \theta_e) \quad (2.6)$$

但し、電子 - イオン熱制動放射の場合、 $\frac{n_e}{n_j Z_j^2}$ を除き、

$$g_{Zj}(\theta_e, \omega) = \theta_e \sqrt{\frac{3\pi}{8}} G(u, \theta_e) \quad (2.7)$$

となる。

2.1.2 Elwert Factor

今後の議論に必要な為、Elwert Factor という因子についても説明していきたい。Elwert Factor とはクーロン力による波動関数の歪みを補正する Factor である。始状態の電子のエネルギーが静止エネルギーよりも十分高いとき、電子は原子核の近くをほぼ直線的に通り返ける。ところが、始状態の電子エネルギーが小さくなるにしたがって、電子はクーロン相互作用を大きく受け、原子核の方に曲げられる。つまり、始状態の電子エネルギーが小さければ小さいほど、終状態の電子が原子核に近い位置にいる事になる。Elwert はここに着目した。Elwert はクーロン力による波動関数の歪みを補正する為に、原子核が存在する点における始状態、終状態の電子の存在確率の比をとり、平面波近似で計算された放射率に乗じた。この補正因子を Elwert Factor という。非相対論的な Elwert Factor は

$$f_{NR}(\eta_i, \eta_f) = \frac{\eta_f}{\eta_i} \frac{1 - \exp(-2\pi\eta_i)}{1 - \exp(-2\pi\eta_f)} \quad (2.8)$$

$$\eta_i = \frac{Z_j e^2}{\hbar v_i}$$

$$\eta_f = \frac{Z_j e^2}{\hbar v_f}$$

として表される。また、相対論的な Elwert Factor は

$$f_{ee}(a_i, a_f) = \frac{a_f}{a_i} \frac{1 - \exp(-2\pi a_i)}{1 - \exp(-2\pi a_f)} \quad (2.9)$$

$$a_i = \frac{\alpha Z_j E_i}{p_i c}$$

$$a_f = \frac{\alpha Z_j E_f}{p_f c}$$

となる。

2.1.3 Photon Production Rate

Photon Production Rate(以下 PPR) を以下のように定義する。

$$P(k, \tau) = \frac{dN}{dV dt dk} \quad (2.10)$$

単位時間・単位体積・単位エネルギー間隔あたりの放射光子数を表す。この値は座標系によらない。また変数 k, τ はそれぞれ、放射光子エネルギー、プラズマエネルギーを電子静止質量で規格化したものであり、

$$k = \frac{h\nu}{mc^2} \quad (2.11)$$

$$\tau = \frac{k_B T}{mc^2} \quad (2.12)$$

である。

また、今回の研究では Fitting を行う為、便宜的に

$$P(k, \tau) = n_1 n_2 \sigma_T c \alpha \frac{e^{-x}}{x} \frac{1}{\sqrt{\tau}} G(x, \tau) \quad (2.13)$$

$$x = \frac{k}{\tau} \quad (2.14)$$

となる $G(x, \tau)$, x を導入する。

2.1.4 Emissivity

Emissivity を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} W(\tau) &= \frac{dE}{dV dt} \\ &= mc^2 \int_0^\infty dk k P(k, \tau) \end{aligned} \quad (2.15)$$

単位時間・単位体積あたりの全放射エネルギーを表す。また、PPR と同様に Fitting を行う為、便宜的に

$$W(\tau) = m_e c^2 n_1 n_2 \sigma_T c \alpha \tau^{\frac{3}{2}} G(\tau) \quad (2.16)$$

$$G(\tau) = \int_0^\infty dx e^{-x} G(x, \tau) \quad (2.17)$$

となる $G(\tau)$ を導入する。

また、この Emissivity は Maxon(1971) によって電子 - イオン・電子 - 電子それぞれの場合について計算が行われ、結果が比較されている。特に、電子 - 電子については非相対論近似、超相対論近似計算を用いて補間計算を行ったものである。この計算をより厳密に行う事も、今回の研究の目的である。また、電子 - イオン散乱について途中から傾きが変わる理由は、イオンの質量が電子に比べて重く、相対論温度が高いことによる。温度の低い所では、電子のみ相対論効果が関係してくるが、イオンには相対論効果が寄与しない。しかし、ある温度を超えるとイオンも相対論効果が効き、元から 2 つの粒子が相対論効果を受けていた電子 - 電子散乱の場合と傾きがほぼ平行になる。このような理由から、電子 - イオン散乱の傾きは途中で変わる事が考えられる。

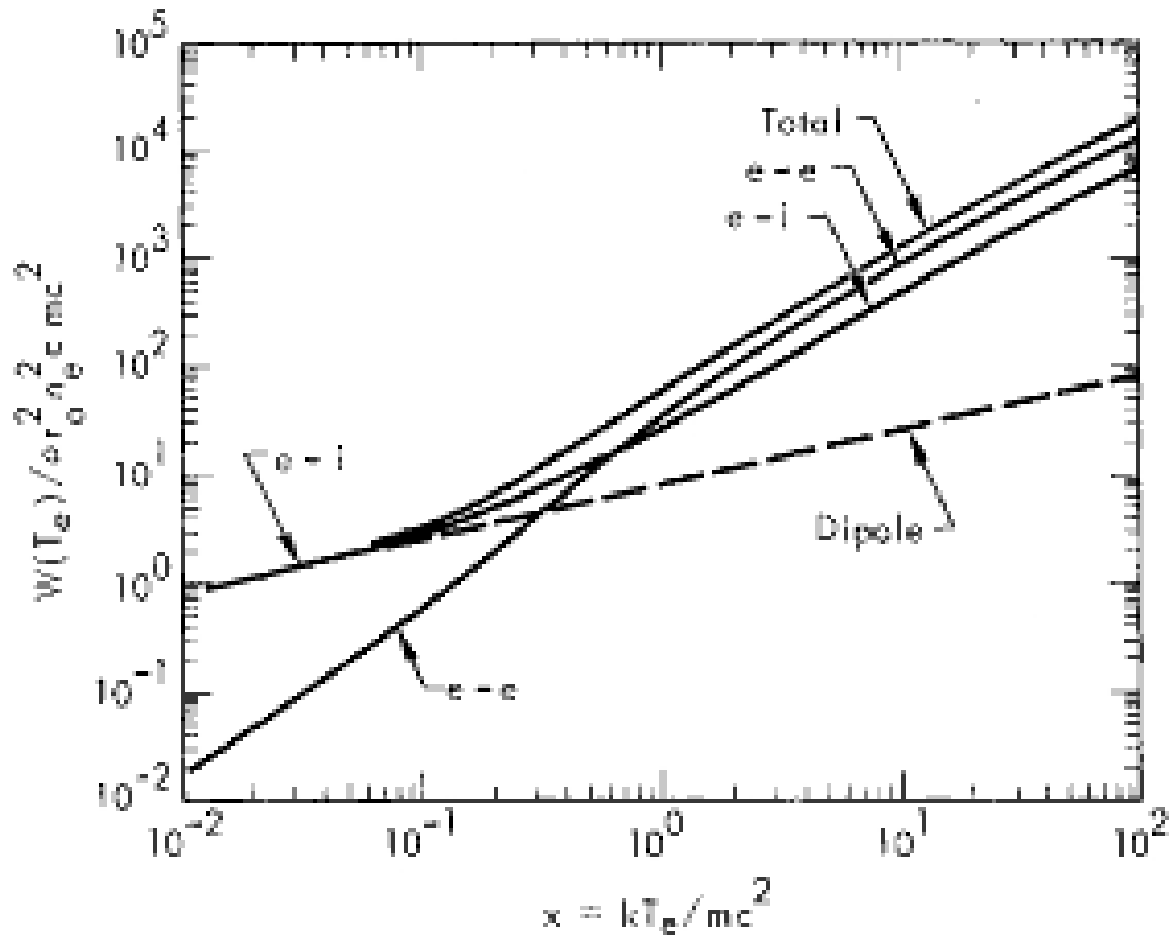


FIG. 4. Bremsstrahlung rate ($Z = 1$).

図 2.1: E-E, E-P について Emissivity の比較 (Maxon 1971 から引用)

2.2 電子 - イオン熱制動放射

2.2.1 概要

電子 - イオン熱制動放射の研究は Nozawa, Itoh, & Kohyama(1998) の論文を筆頭に行われてきた。この論文では、非相対論領域での Gaunt Factor 厳密計算・Elwert 近似計算・Born 近似計算、相対論領域での Elwert 近似・Born 近似計算が行われた。それぞれの計算を比較し、非相対論領域、相対論領域の接続が行われ、低温領域では非相対論的厳密計算、高温領域では相対論的 Elwert 近似の計算が有用であると報告されている。電子 - イオン熱制動放射はプラズマ放射全体から見て、低温領域での寄与が大きい。その為、特に、非相対論領域での厳密計算は幅広い範囲で応用されている。また、この計算は縮退パラメータを用いる事で、縮退・非縮退のどちらの状態も計算する事が出来る。厳密計算については Karzas & Latter(1961) によって計算されたものを採用している。更に、非相対論領域については Nakagawa et al.(1987), Itoh et al.(1990, 1997) において行われた高温・高密度プラズマに適應した非相対論的 Gaunt Factor の計算が行われている。一方、相対論領域では、銀河団プラズマのような高温・低密度プラズマでの熱制動放射 Gaunt Factor が計算されている。この計算は、Itoh et al.(1985) によって計算された Bethe-Heitler のやり方で導出された散乱断面積を用いている。また、Elwert(1939) で報告されている Elwert Factor を導入し、クーロン相互作用の寄与を考慮し、原子番号の小さいところでは良い近似となっている。分布関数はフェルミ分布関数が採用されている。それは、以前に行われた電子の縮退を考慮した相対論的 Gaunt Factor の計算でフェルミ分布関数を用いており、その計算との関連性を強める事、そして、フェルミ分布関数を計算する為に、 G_0^- という関数を用いている事、これら 2 つが理由となっている。Nozawa, Itoh, & Kohyama(1998) によって、このような計算が行われ、非相対論から相対論領域まで幅広く計算を行う事が出来るようになった。更に、この計算を元に以下のような論文が投稿されている。2000 年の Itoh, Sakamoto, Kusano, Kohyama & Nozawa では相対論的 Gaunt Factor の計算結果を Fitting し、その結果が報告された。2002 年の Itoh, Sakamoto, Kusano, Kawana & Nozawa では、Gaunt Factor を周波数積分したものを導出 (Emissivity の導出) し、その結果に Fitting がなされた。これらの研究によって電子 - イオン熱制動放射の Gaunt Factor を、広範囲に渡って計算できるようになった。

また、超相対論的電子 - イオン熱制動放射は Quigg(1968) によって行われている。先の Nozawa, Itoh, & Kohyama(1998) の論文を用いても超相対論領域の計算が行えるが、Quigg(1968) では超相対論近似計算が行われている。散乱断面積は Bethe-Heitler の方法、分布関数は Maxwell-Boltzmann 分布が採用されている。この近似精度は $k_B T = 1\text{MeV}$ で 10%, $k_B T = 5\text{MeV}$ で 1.5% となっている。本稿ではその導出を行い、付録に載せた。これらの計算によって電子 - イオン熱制動放射の研究が行われてきた。今回、これらの論文を参考に数値計算を行った。計算方法、結果をそれぞれ示していく。

2.2.2 非相対論領域

Nozawa, Itoh, & Kohyama(1998) の論文において、非相対論的電子 - イオン熱制動放射の Gaunt factor 厳密計算、Born 近似計算、Elwert 近似計算が行われた。こちらの論文では相対論的な Gaunt Factor の計算も行われたが、ここでは非相対論領域について述べる。

• 厳密計算

まず、 g は以下の式で表される。

$$g = \frac{2\sqrt{3}}{\pi\eta_i\eta_f} [(\eta_i^2 + \eta_f^2 + 2\eta_i^2\eta_f^2)I_0 - 2\eta_i\eta_f(1 + \eta_i^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \eta_f^2)^{\frac{1}{2}}I_1]I_0 \quad (2.18)$$

$$\eta_i^2 = \frac{Z_j^2 R_y}{\epsilon_i}, \eta_f^2 = \frac{Z_j^2 R_y}{\epsilon_f} \quad (2.19)$$

$$I_l = \frac{1}{4} \left[\frac{4k_i k_f}{(k_i - k_f)^2} \right]^{l+1} \exp\left(\frac{\pi|\eta_i - \eta_f|}{2}\right) \frac{|\Gamma(l+1+i\eta_i)\Gamma(l+1+i\eta_f)|}{\Gamma(2l+2)} G_l \quad (2.20)$$

$$G_l = \left| \frac{k_f - k_i}{k_f + k_i} \right|^{i\eta_i + i\eta_f} {}_2F_1 \left[l+1 - i\eta_f, l+1 - i\eta_i; 2l+2; -\frac{4k_i k_f}{(k_i - k_f)} \right] \quad (2.21)$$

$${}_2F_1(a, b; c; x) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+m)\Gamma(b+m)\Gamma(c)}{\Gamma(c+m)\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{x^m}{m!} \quad (2.22)$$

但し、 ${}_2F_1(a, b; c; x)$ は超幾何関数、 $\eta_i(\eta_f)$ は入射電子（散乱電子）の運動エネルギー、 $k_i(k_f)$ は入射電子（散乱電子）の波数である。 G_l は Karzas & Latter(1961) の論文において、級数展開計算が行われている。

次に、熱平均化された Gaunt Factor を計算する為に、 $g_{NR}(u, \gamma^2)$ を式 (2.18) を用いて計算する。

$$g_{NR}(u, \gamma^2) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} d\epsilon_i g f(\epsilon_i) [1 - f(\epsilon_f)]}{2 \beta^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} d\epsilon_i \epsilon_i^{\frac{1}{2}} f(\epsilon_i)} \quad (2.23)$$

$$f(\epsilon_i) = \frac{1}{\exp(\beta\epsilon_i - \eta) + 1} \quad (2.24)$$

$$\beta \equiv (k_B T)^{-1} \quad (2.25)$$

$$\gamma^2 = \frac{Z_j^2 R_y}{k_B T} = Z_j^2 \frac{1.579 \times 10^5 K}{T} \quad (2.26)$$

$$\langle W(\omega) \rangle_{NR} d\omega = 1.426 \times 10^{-27} g_{NR}(u, \gamma^2) [n_e (cm^{-3})] [n_j (cm^{-3})] Z_j^2 [T(K)]^{\frac{1}{2}} e^{-u} du ergs^{-1} cm^{-3} \quad (2.27)$$

式 (2.23) と式 (2.27) を用いて、式 (2.1) より Gaunt Factor を求めることが出来る。

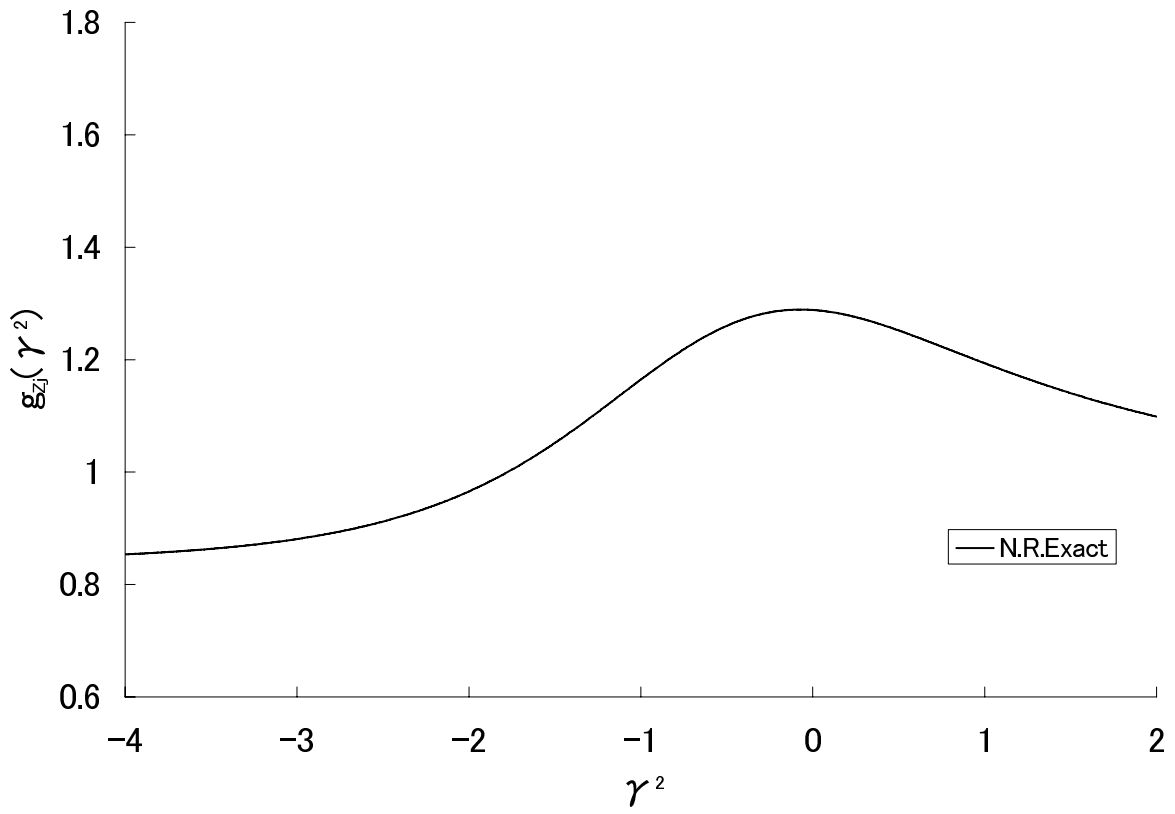


図 2.2: 非相対論的電子 - イオン熱制動放射 Gaunt Factor 厳密計算

- Born 近似

g は以下の式で表される。

$$g_{NRB} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left| \frac{p_f + p_i}{p_f - p_i} \right| \quad (2.28)$$

この式を、厳密的 Gaunt Factor の場合と同様に (2.23)、(2.27) を用いて計算する事で Born 近似における電子 - イオン熱制動放射の Gaunt Factor を求めることが出来る。

- Elwert 近似

Elwert 近似は Born 近似をクーロン相互作用補正項

$$f_{ee} = \frac{\eta_f}{\eta_i} \frac{1 - \exp(-2\pi\eta_i)}{1 - \exp(-2\pi\eta_f)} \quad (2.29)$$

で補正したものであり、Born 近似の g に (2.29) を乗じる事で Elwert 近似 Gaunt Factor を求めることが出来る。よって、

$$\begin{aligned} g_{NRE} &= g_{NRB} f_{ee} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left| \frac{p_f + p_i}{p_f - p_i} \right| \frac{\eta_f}{\eta_i} \frac{1 - \exp(-2\pi\eta_i)}{1 - \exp(-2\pi\eta_f)} \end{aligned} \quad (2.30)$$

となる。

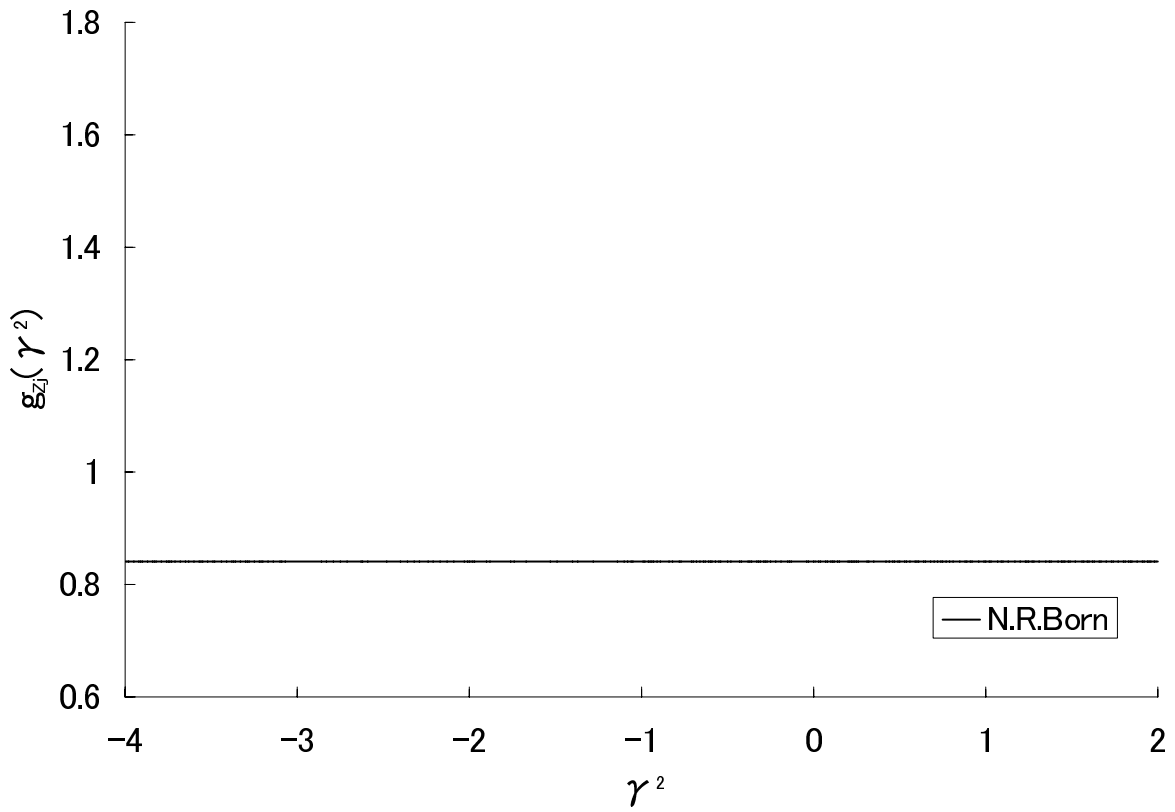


図 2.3: 非相対論的電子 - イオン熱制動放射 Gaunt Factor Born 近似計算

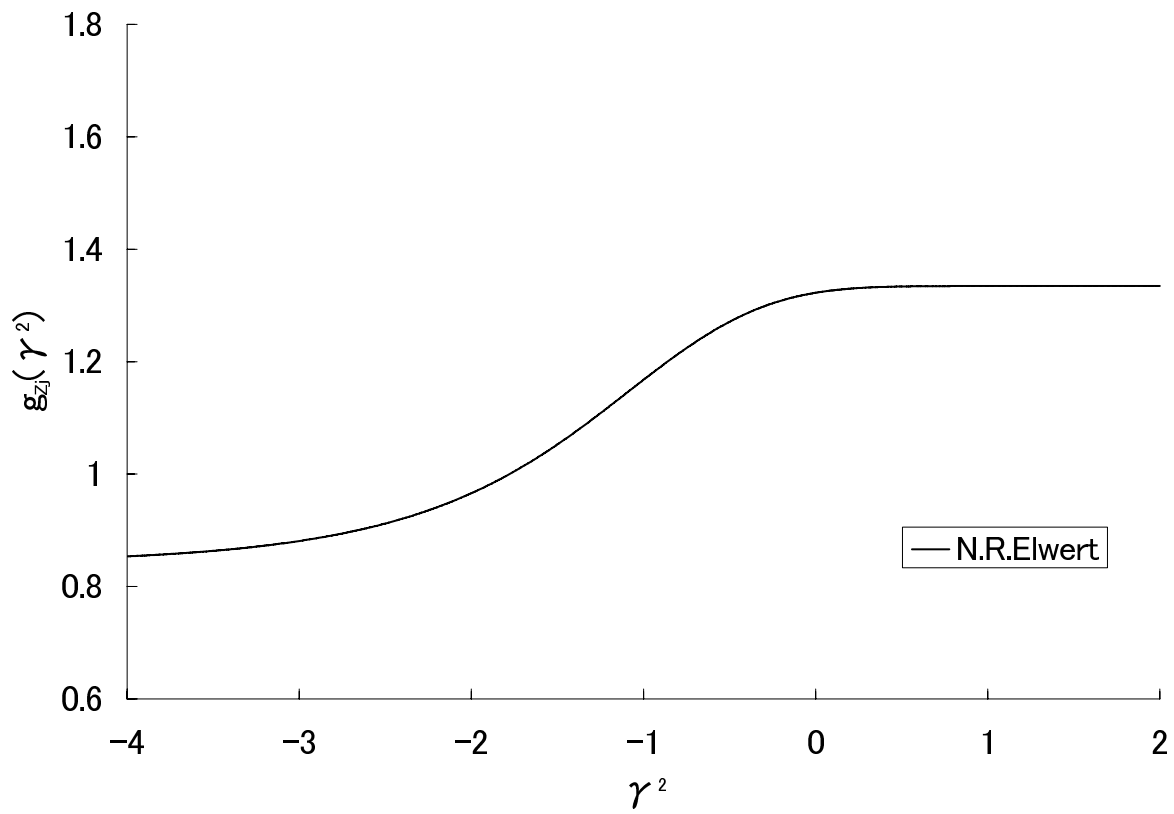


图 2.4: 非相对論的電子 - イオン熱制動放射 Gaunt Factor Elwert 近似計算

2.2.3 中間領域

Nozawa, Itoh, & Kohyama(1998) の論文において相対論的電子 - イオン熱制動放射 Gaunt factor の計算が行われた。式 (2.1) の $\langle W(\omega) \rangle$ は以下の式より表す事が出来る。

$$\langle W(\omega) \rangle d\omega = \frac{n_e n_j Z_j^2 \alpha r_0^2 \hbar c \lambda^3 J^-(\lambda, \nu, u, Z_j)}{G_0^-(\lambda, \nu)} d\omega \quad (2.31)$$

$$G_0^-(\lambda, \nu) \equiv \lambda^3 \int_{\lambda^{-1}}^{\infty} \frac{x (x^2 - \lambda^{-2})^{\frac{1}{2}}}{1 + e^{x-\nu}} dx \quad (2.32)$$

$$\lambda \equiv \frac{k_B T}{mc^2} = \frac{T}{5.930 \times 10^9 K} \quad (2.33)$$

$$\nu = \frac{\mu}{k_B T} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} & J^-(\lambda, \nu, u, Z_j) \\ &= \int_{\lambda^{-1}+u}^{\infty} dx \frac{x^2 - \lambda^{-2}}{e^{x-\nu} + 1} \frac{x-u}{x} \left(1 - \frac{1}{e^{x-u-\nu} + 1} \right) \frac{1 - \exp \left[-2\pi\alpha Z_j x (x^2 - \lambda^{-2})^{-\frac{1}{2}} \right]}{1 - \exp \left[-2\pi\alpha Z_j (x-u) \left\{ (x-u)^2 - \lambda^{-2} \right\}^{-\frac{1}{2}} \right]} \\ &\times \left[\frac{4}{3} - 2(x-u)x \frac{\left\{ (x-u)^2 - \lambda^{-2} \right\} + (x^2 - \lambda^{-2})}{\left\{ (x-u)^2 - \lambda^{-2} \right\} (x^2 - \lambda^{-2})} + \lambda^{-2} \left\{ \frac{\beta_f x}{\left\{ (x-u)^2 - \lambda^{-2} \right\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{\beta_i (x-u)}{\left\{ x^2 - \lambda^{-2} \right\}^{\frac{3}{2}}} \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\beta_f \beta_i}{\left\{ (x-u)^2 - \lambda^{-2} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ x^2 - \lambda^{-2} \right\}^{\frac{1}{2}}} \right\} + L \left(\frac{8}{3} \frac{(x-u)x}{\left\{ (x-u)^2 - \lambda^{-2} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ x^2 - \lambda^{-2} \right\}^{\frac{1}{2}}} \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{u^2}{\left\{ (x-u)^2 - \lambda^{-2} \right\}^{\frac{3}{2}} \left\{ x^2 - \lambda^{-2} \right\}^{\frac{3}{2}}} \left\{ (x-u)^2 x^2 + \left[(x-u)^2 - \lambda^{-2} \right] (x^2 - \lambda^{-2}) \right\} \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\lambda^{-2} u}{2 \left[(x-u)^2 - \lambda^{-2} \right]^{\frac{1}{2}} (x^2 - \lambda^{-2})^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{(x-u)x + (x^2 - \lambda^{-2})}{(x^2 - \lambda^{-2})^{\frac{3}{2}}} \beta_i \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. - \frac{(x-u)x + \left[(x-u)^2 - \lambda^{-2} \right]}{\left[(x-u)^2 - \lambda^{-2} \right]^{\frac{3}{2}}} \beta_f + \frac{2u(x-u)x}{\left[(x-u)^2 - \lambda^{-2} \right] (x^2 - \lambda^{-2})} \right\} \right) \right] \quad (2.35) \end{aligned}$$

これにより Gaunt Factor を求めることが出来る。

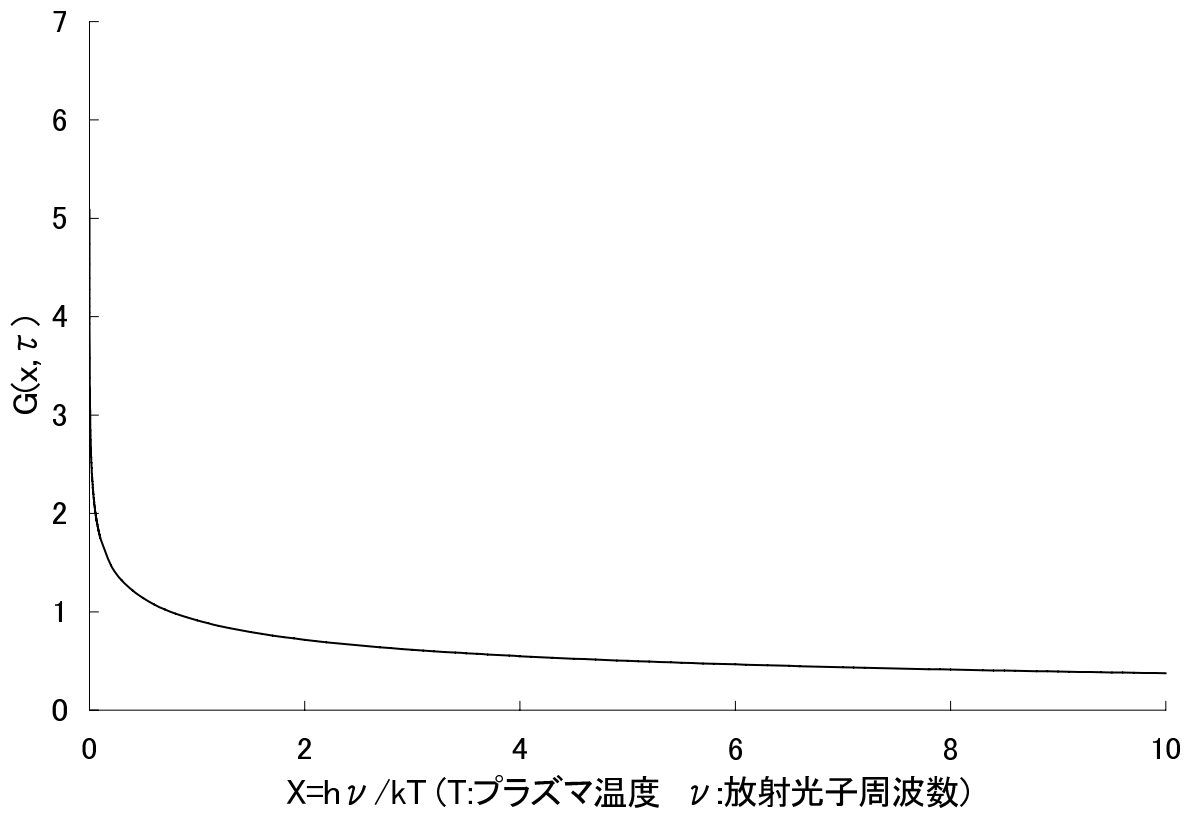


図 2.5: 相対論的電子 - イオン熱制動放射 PPR $k_B T = 1\text{keV}$

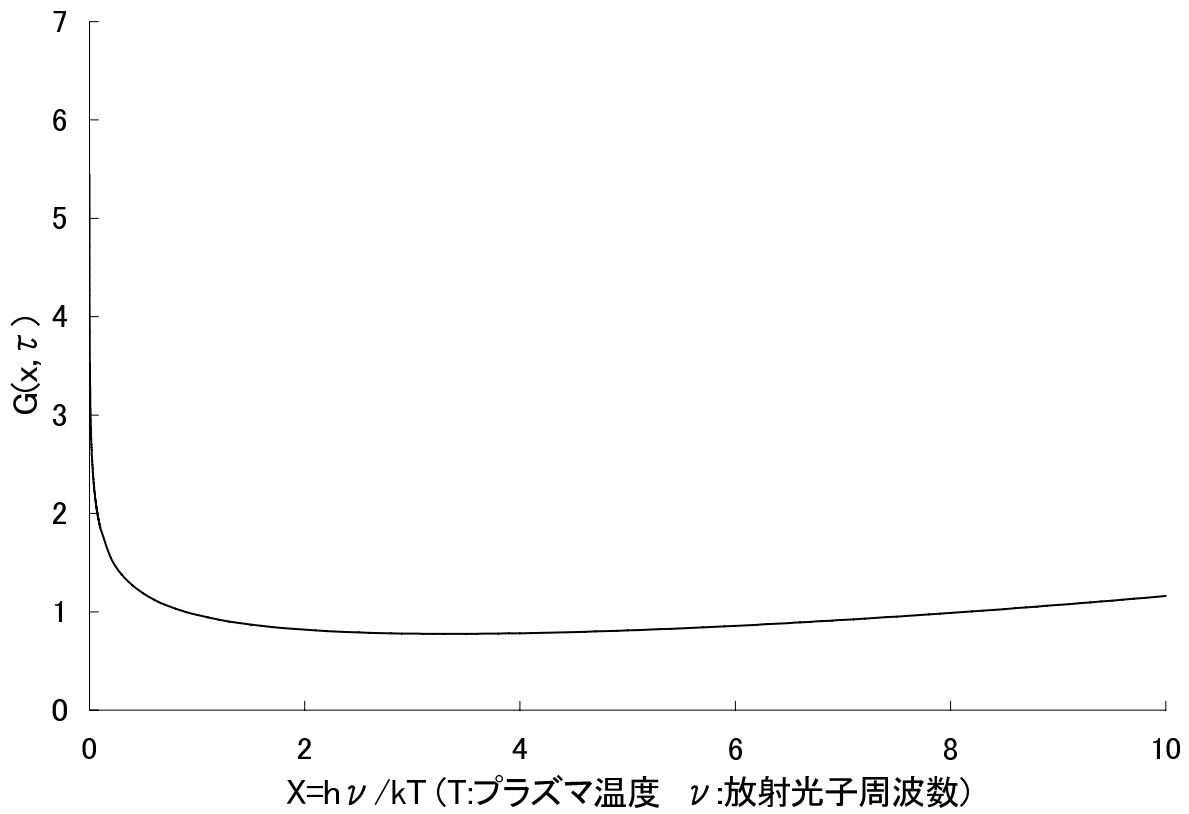


図 2.6: 相対論的電子 - イオン熱制動放射 PPR $k_B T = 100\text{keV}$

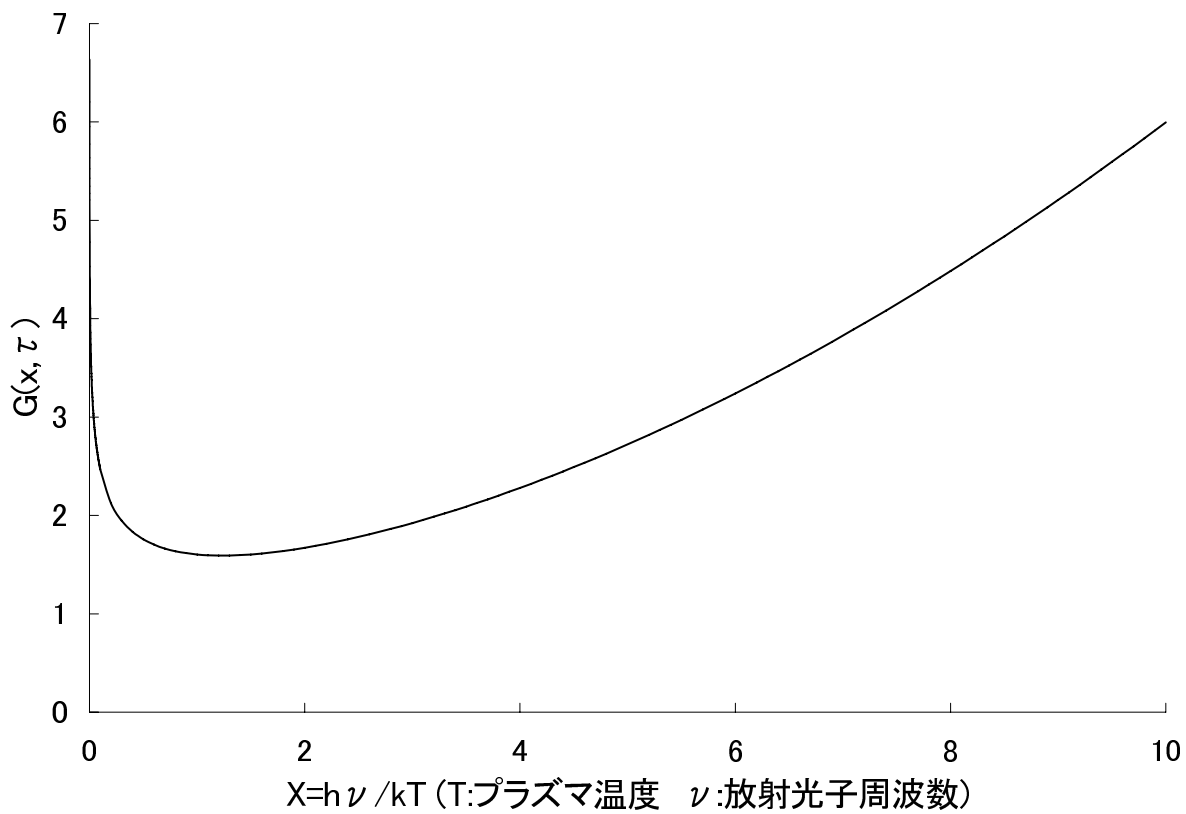


図 2.7: 相対論的電子 - イオン熱制動放射 PPR $k_B T = 300\text{keV}$

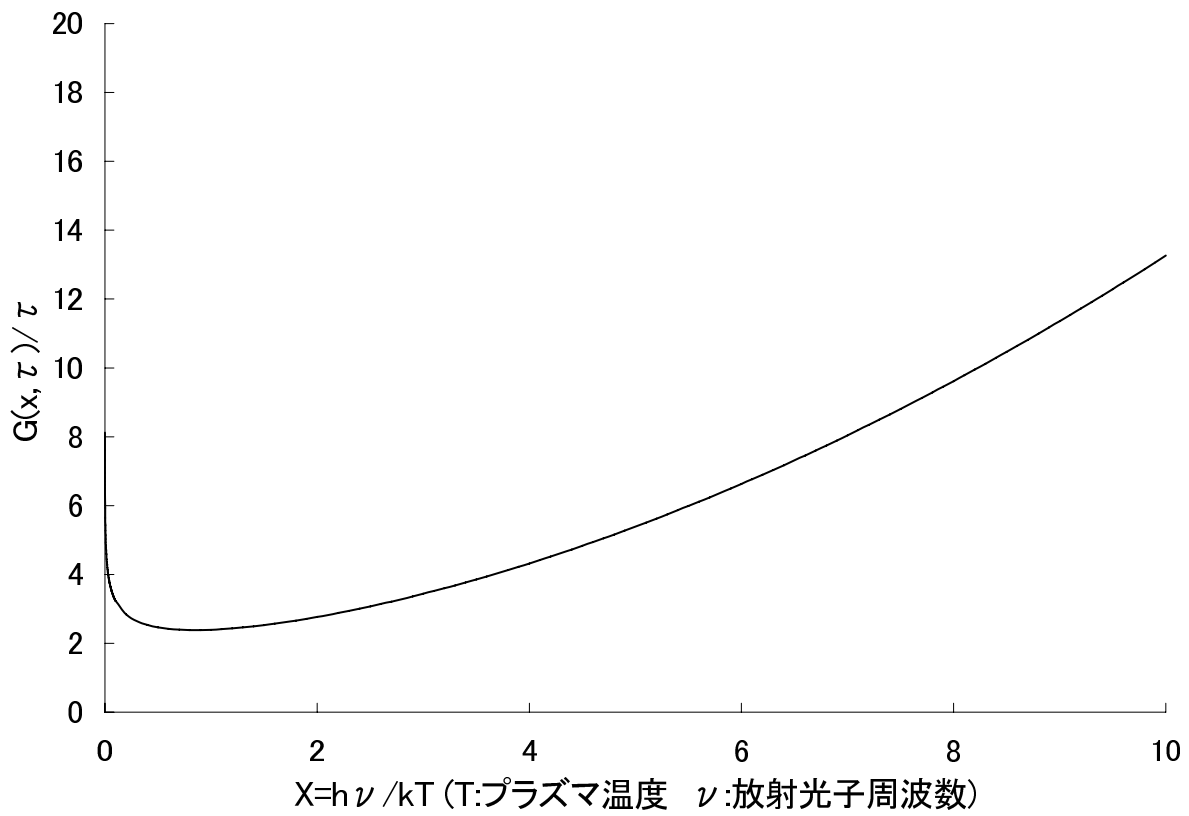


図 2.8: 相対論的電子 - イオン熱制動放射 PPR $k_B T = 500\text{keV}$

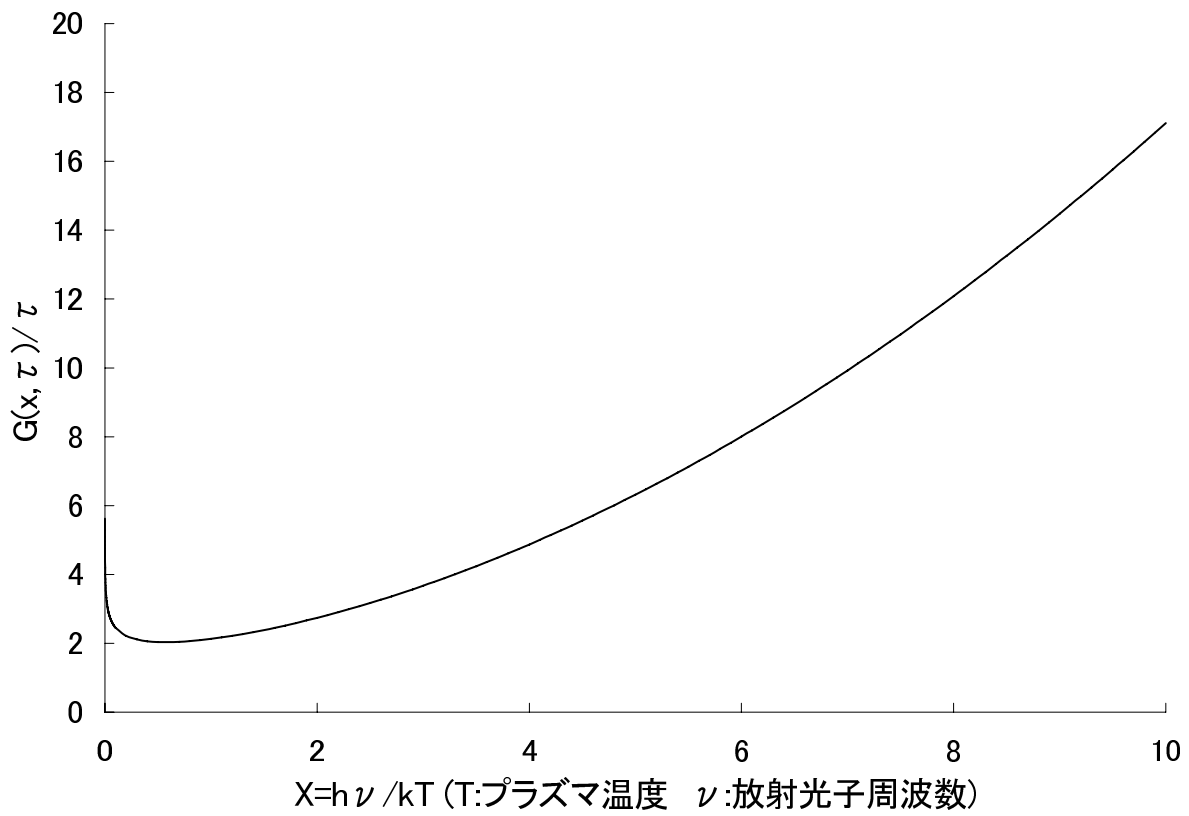


図 2.9: 相対論的電子 - イオン熱制動放射 PPR $k_B T = 1\text{MeV}$

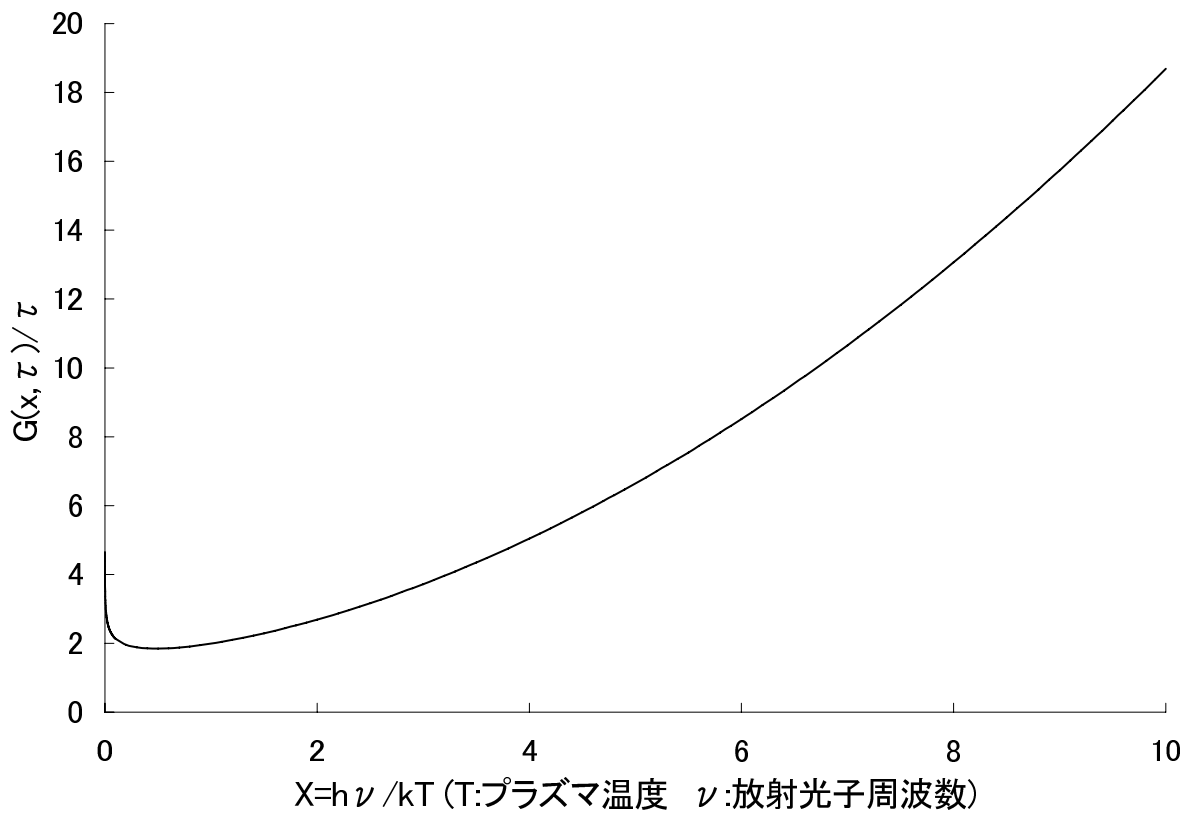


図 2.10: 相対論的電子 - イオン熱制動放射 PPR $k_B T = 1.5 \text{ MeV}$

2.2.4 超相対論領域

Quigg(1968) の論文において、電子 - イオン熱制動放射の超相対論近似計算が行われた。PPR は以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 P_{ER}(\nu, T) d(h\nu) = & 2\sigma_0 c n_e n_i \frac{d\nu}{\nu} \frac{\xi^{-2} e^{-\lambda}}{K_2(\xi)} \\
 & \times \left\{ \frac{40}{3} + \frac{4}{3} \lambda - \lambda^2 + 2 \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3} \lambda + \lambda^2 \right) \right. \\
 & \left. \times \left(\ln \left(\frac{2}{\xi} \right) - \gamma \right) - e^\lambda E_i(-\lambda) \left(\frac{16}{3} - \frac{8}{3} \lambda + 2\lambda^2 \right) \right\} \quad (2.36)
 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{h\nu}{k_B T} \quad (2.37)$$

$$\xi = \frac{mc^2}{k_B T} \quad (2.38)$$

$K_2(x)$ は第二種ベッセル関数、 $\gamma \simeq 0.5772$ はオイラー定数である。

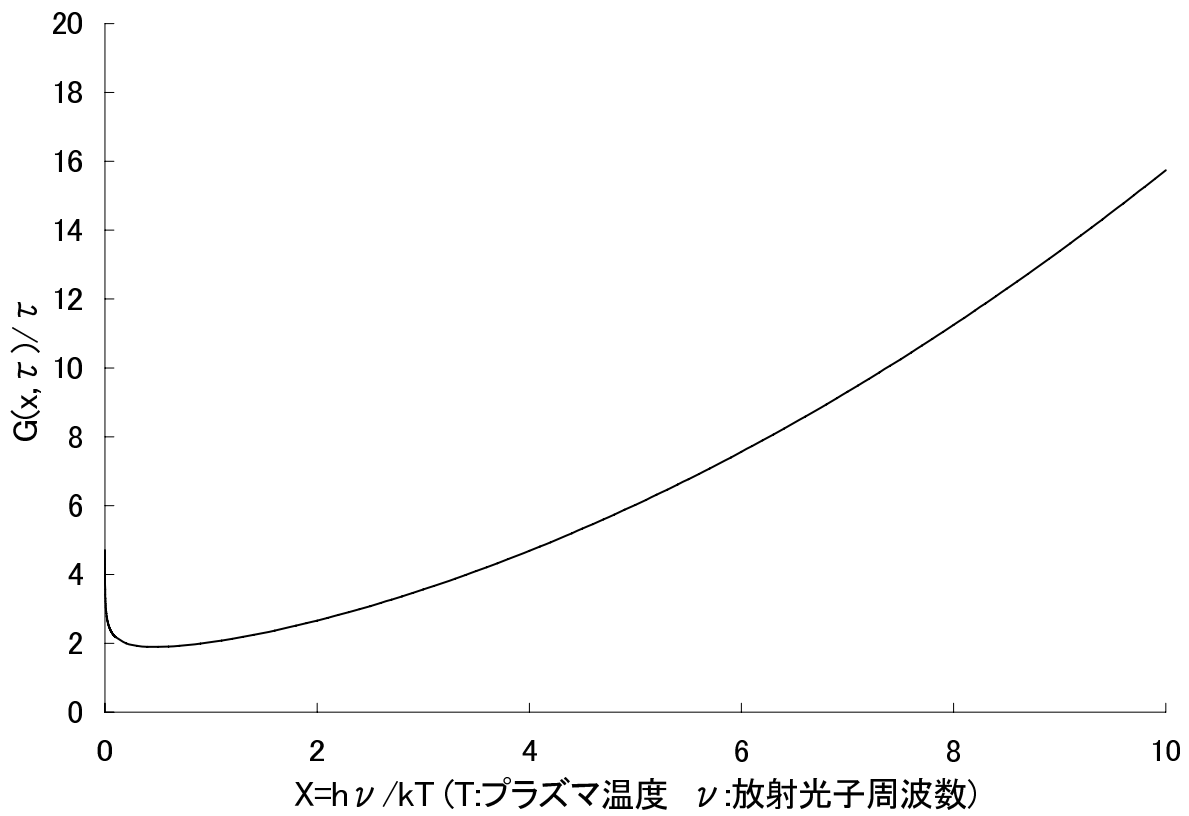


図 2.11: 超相対論的電子 - イオン熱制動放射 PPR $k_B T = 1.5 \text{ MeV}$

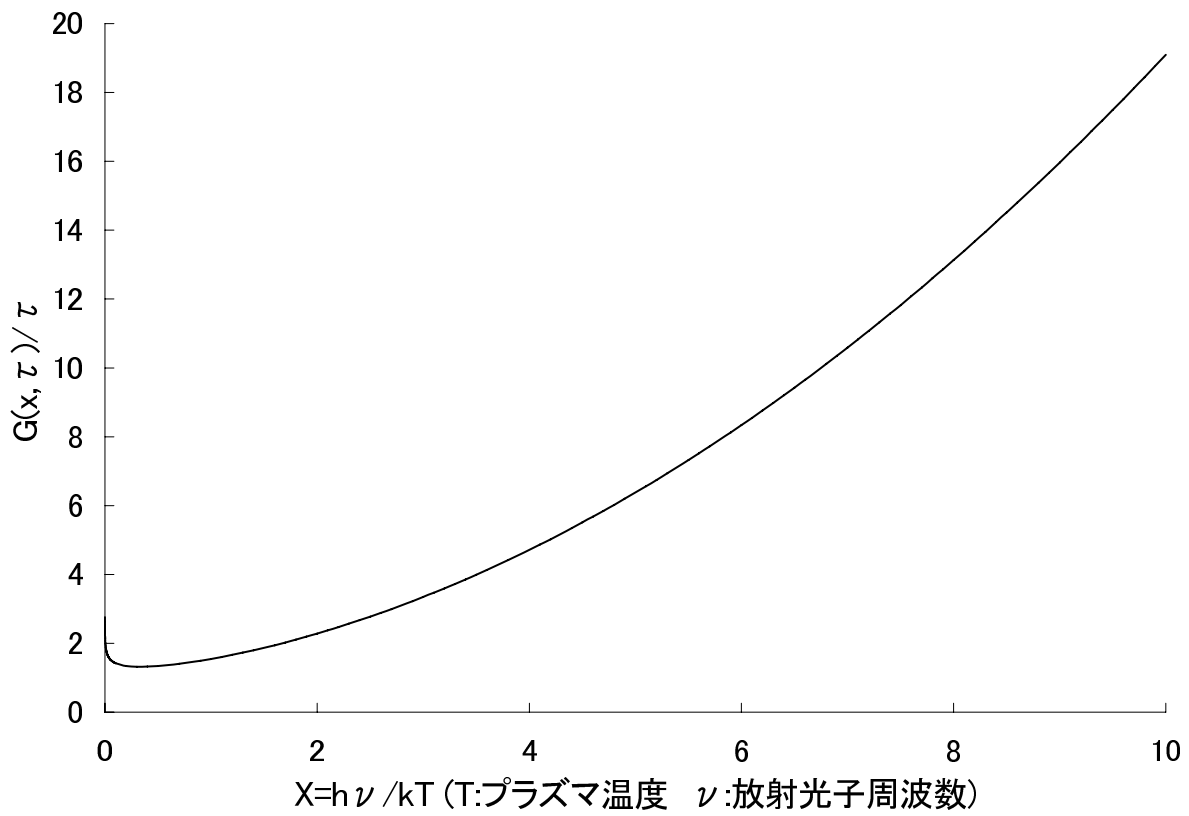


図 2.12: 超相対論的電子 - イオン熱制動放射 PPR $k_B T = 5\text{MeV}$

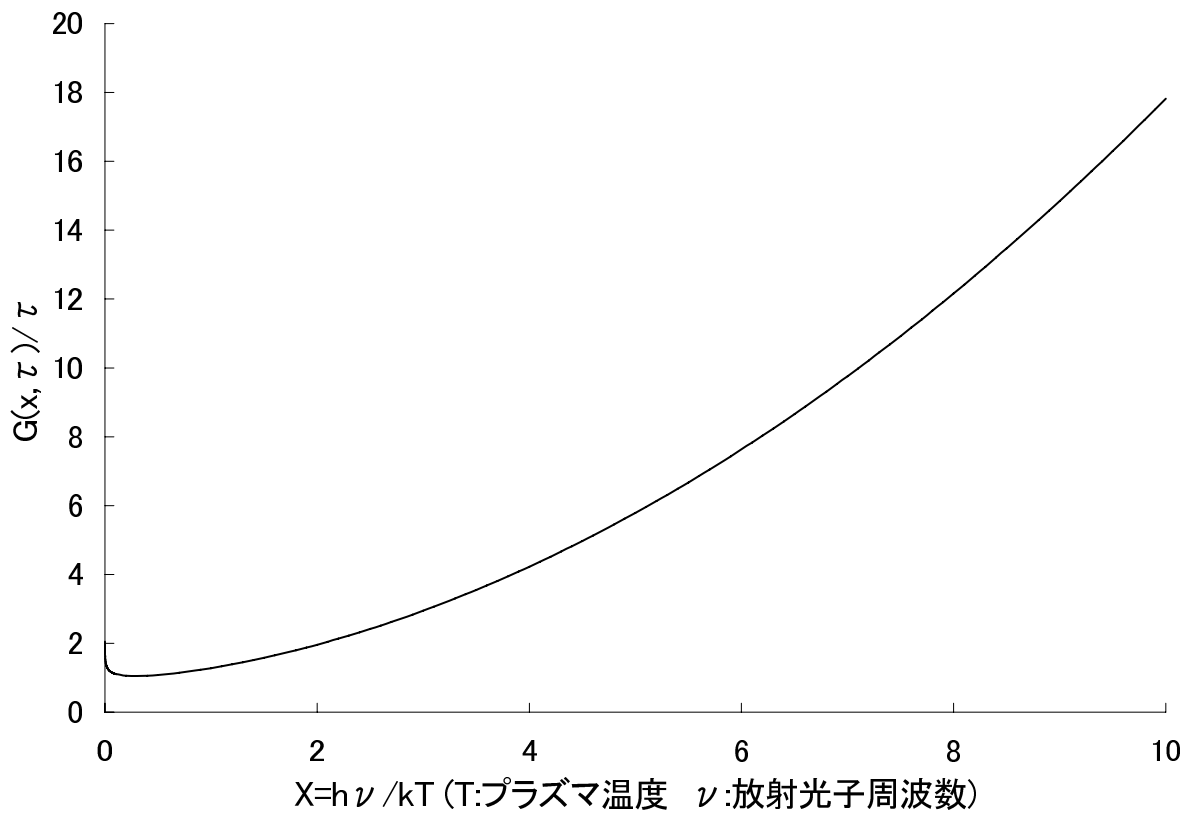


図 2.13: 超相対論的電子 - イオン熱制動放射 PPR $k_B T = 10\text{MeV}$

2.3 電子 - 電子熱制動放射

2.3.1 概要

電子 - 電子熱制動放射はそれぞれの温度領域について研究が行われてきた。非相対論領域では Maxon & Corman(1967), Maxon & Corman(1972), Itoh, Kawana, & Nozawa (2002a) によって研究が行われ、非相対論的電子 - 電子熱制動放射 Gaunt Factor の計算が行われた。特に、Itoh, Kawana, & Nozawa (2002a) では Fitting 計算が行われ、観測データ解析を行うにあたって、非常に有用なものとなっている。また、Maxon & Corman(1967), Maxon & Corman(1972) では非相対論近似における電子 - 電子熱制動放射散乱断面積が示された。それらを用いた、PPR の計算では Maxwell-Boltzmann 分布、Elwert 近似が採用されている。一方、中間領域については Haug(1975a), Stepney & Guilbert(1983) によって計算が行われてきた。この領域では、PPR を計算するにあたって、7重積分を行う必要がある。しかし、Haug(1975a) によって終電子の立体角積分について解析的な計算が行われ、PPR が5重積分によって計算できるようになった。その方法を用いて Stepney & Guilbert(1983) では PPR の計算とその Fitting が行われた。Fitting 領域は $0.05 \leq x \leq 10$, プラズマ温度 50keV から 1MeV までの 13 点について、5%以内の Fitting 精度で行われた。プラズマ温度領域については断片的に行われたものであり、連続的な関数として表記されていない。その為、今回の研究では、この領域を連続的な関数として Fitting を行い、 x についてもより広い領域で Fitting を行った。また、超相対論領域は Alexanian(1968) によって PPR・Emissivity の超相対論近似計算が行われている。これは超相対論近似をおこなったものであり、計算の際には、Maxwell-Boltzmann 分布が採用されている。この近似計算の導出は付録として載せた。特に、電子 - イオン熱制動放射と比べて電子 - 電子熱制動放射は高温領域で支配的である事から、相対論・超相対論領域での研究を進めていく必要がある。

2.3.2 非相対論領域

Maxon & Corman(1967), Maxon & Corman(1972) の論文において、非相対論的電子 - 電子熱制動放射 Gaunt Factor が計算された。

$$\langle W(\omega) \rangle_{ee} d\omega \equiv g_{ee}(\theta_e, u) \langle W(\omega) \rangle_K d\omega \quad (2.39)$$

$$g_{ee}(\theta_e, u) = \frac{n_e}{n_j Z_j^2} \theta_e J(\theta_e, u) \quad (2.40)$$

$$\theta_e \equiv \frac{k_B T}{mc^2} \quad (2.41)$$

$$u \equiv \frac{\hbar\omega}{k_B T} \quad (2.42)$$

$$J(\theta_e, u) = \frac{\sqrt{3}}{10\sqrt{2}\pi} u^2 e^u I(\theta_e, u) \quad (2.43)$$

$$I(\theta_e, u) = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y}} \frac{\exp\left[\pi\alpha\sqrt{\frac{y}{\theta_e u}}\right] - 1}{\exp\left[\pi\alpha\sqrt{\frac{y}{\theta_e u(1-y)}}\right] - 1} A(u, y) \quad (2.44)$$

$$A(u, y) = \frac{e^{-\frac{u}{y}}}{y^3} \left[\left\{ 17 - \frac{3y^2}{(2-y)^2} \right\} \sqrt{1-y} + \left\{ \frac{12(2-y)^4 - 7(2-y)^2 y^2 - 3y^4}{(2-y)^3} \right\} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{\frac{1}{y} - 1}\right) \right] \quad (2.45)$$

また、Gaunt Factor と PPR の関係式より、

$$J(\theta_e, u) = \sqrt{\frac{3\pi}{8}} G(u, \theta_e) \quad (2.46)$$

となる。よって PPR と Emissivity は、

$$P_{ee}^{NR}(k, \tau) = n_e^2 \sigma_T c \alpha \frac{e^{-x}}{x} \frac{1}{\sqrt{\tau}} G^{NR}(x, \tau), \quad (2.47)$$

$$G^{NR}(x, \tau) = \frac{1}{5\pi^{3/2}} \int_0^\infty ds e^{-s} f_{ee}^{NR} A(x, s), \quad (2.48)$$

$$f_{ee}^{NR} = \sqrt{\frac{s+x}{s}} \frac{\exp\left(\frac{\pi\alpha}{\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{s+x}}\right) - 1}{\exp\left(\frac{\pi\alpha}{\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{s}}\right) - 1}, \quad (2.49)$$

$$A(x, s) = \left\{ 17 - 3 \left(\frac{x}{2s+x} \right)^2 \right\} \sqrt{s(s+x)} + (2s+x) \left\{ 12 - 7 \left(\frac{x}{2s+x} \right)^2 - 3 \left(\frac{x}{2s+x} \right)^4 \right\} \ln \frac{\sqrt{s} + \sqrt{s+x}}{\sqrt{x}}, \quad (2.50)$$

$$W_{ee}^{NR}(\tau) = m_e c^2 n_e^2 \sigma_T c \alpha \tau^{3/2} G^{NR}(\tau), \quad (2.51)$$

$$G^{NR}(\tau) = \int_0^\infty dx e^{-x} G^{NR}(x, \tau). \quad (2.52)$$

但し、 f_{ee}^{NR} は Elwert Factor を表す。

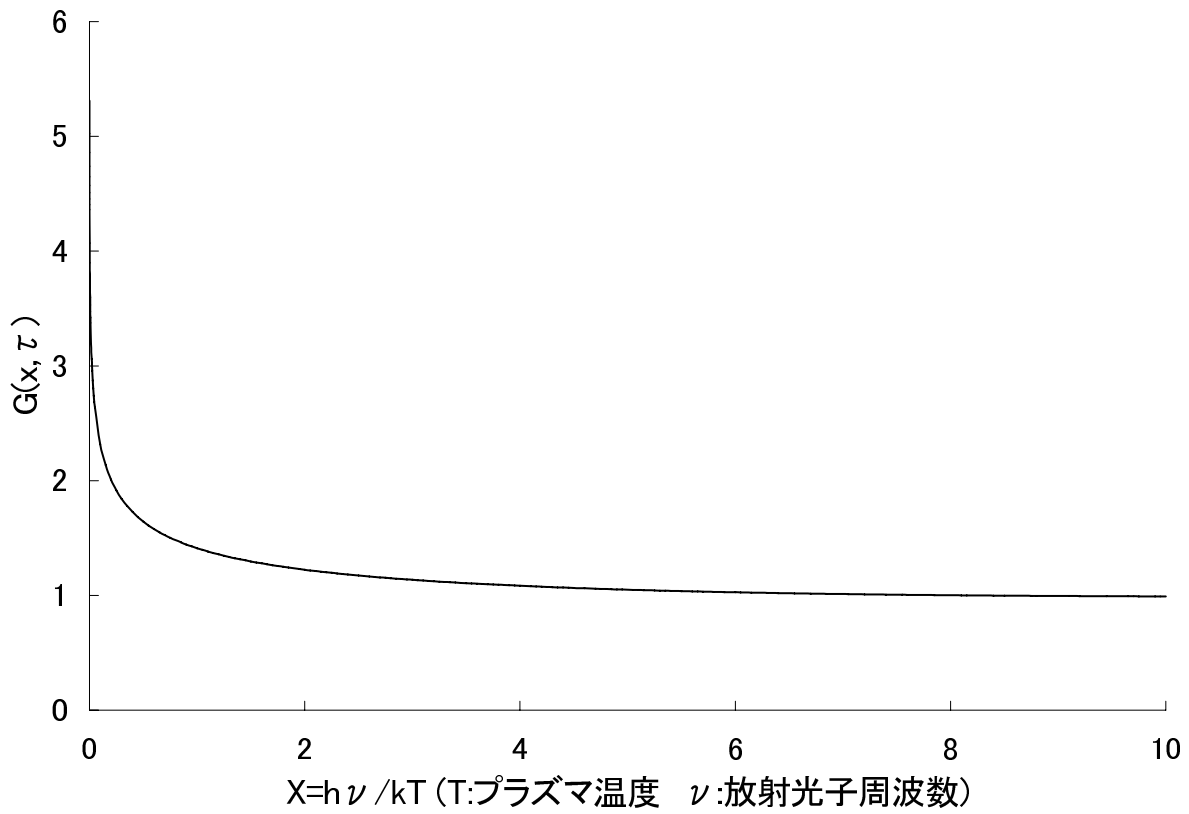


図 2.14: 非相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR $k_B T = 50\text{eV}$

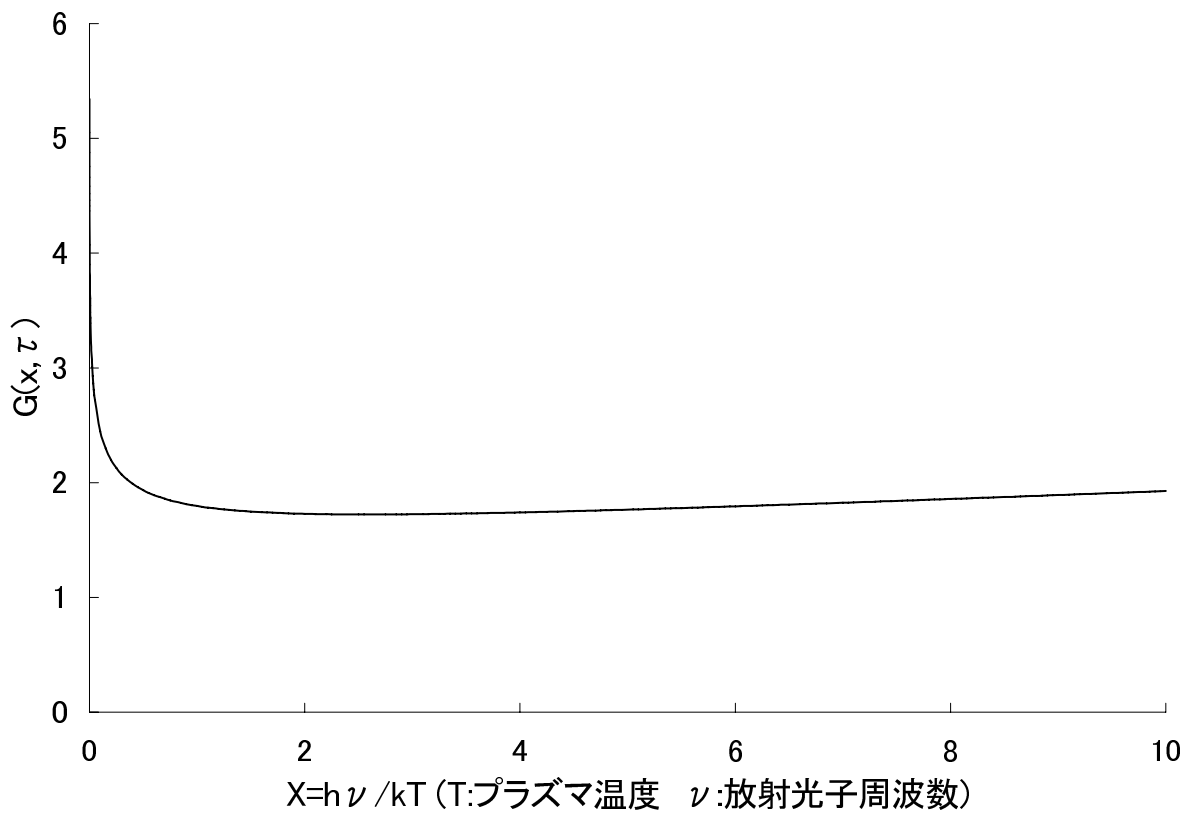


図 2.15: 非相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR $k_B T = 0.5 \text{keV}$

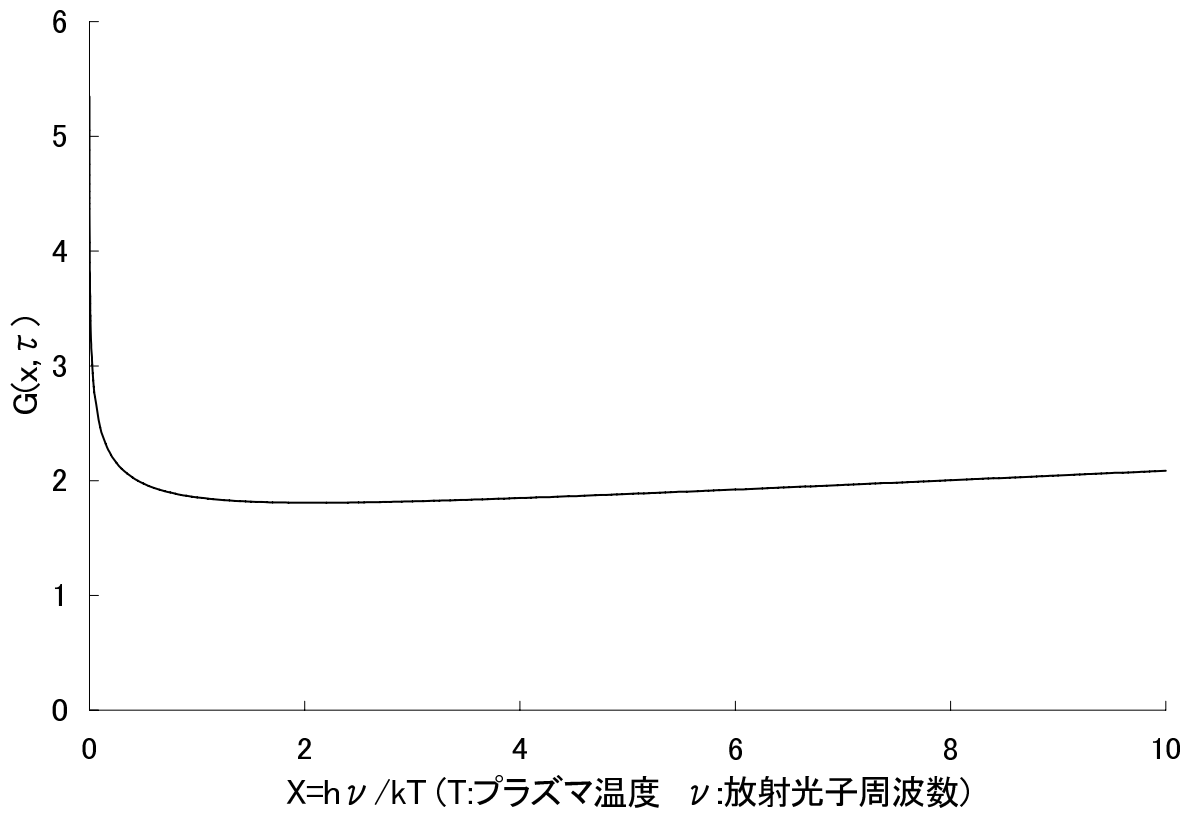


図 2.16: 非相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR $k_B T = 1\text{keV}$

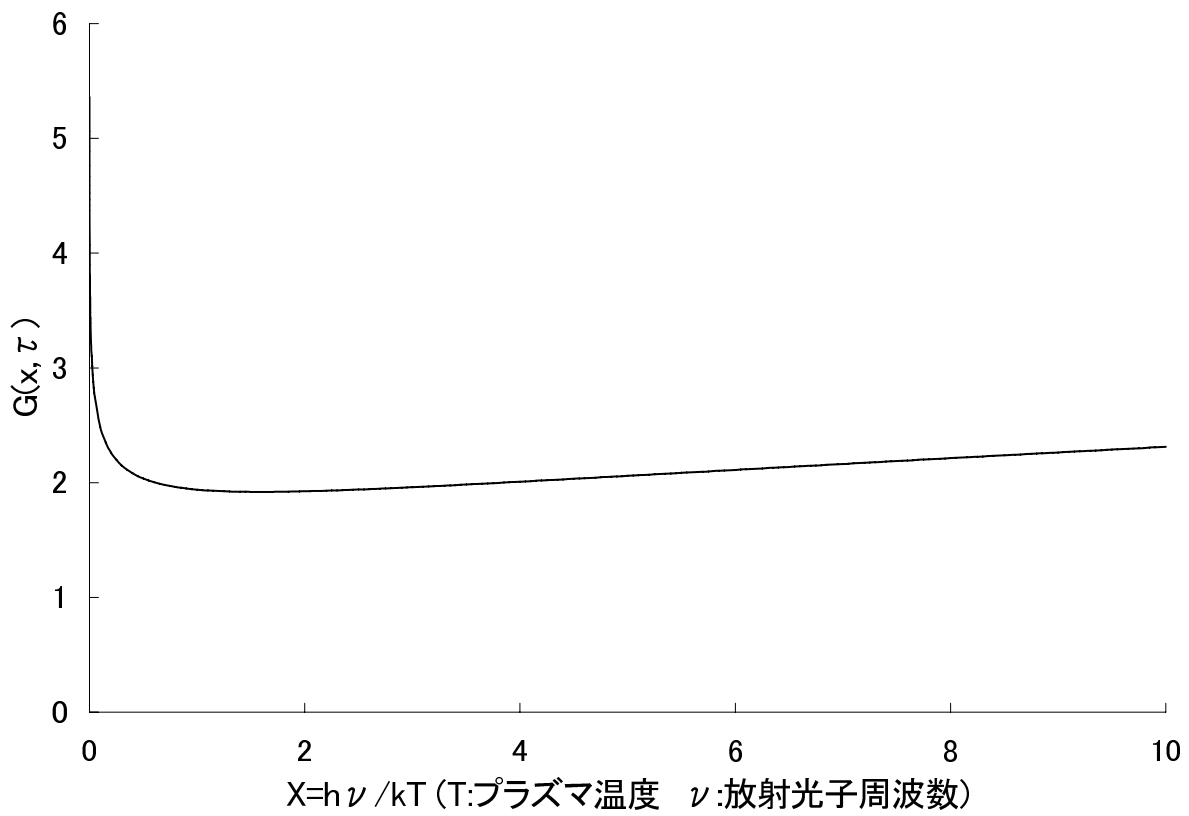


図 2.17: 非相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR $k_B T = 10\text{keV}$

また、Itoh, Kawana, & Nozawa (2002a) では、非相対論領域での Fitting 式が導出された。範囲は $50\text{eV} \leq k_B T \leq 25\text{keV}$ 、 $10^{-4} \leq x \leq 10$ Fitting 精度は 0.1% である。PPR の Fitting は以下のように表されている。

$$P_{ee}(k, \tau) = n_e^2 \sigma_T c \alpha \frac{e^{-x}}{x} \frac{1}{\sqrt{\tau}} G(x, \tau), \quad (2.53)$$

$$G(x, \tau) = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \sum_{i=0}^{10} \sum_{j=0}^{10} a_{ij} \Theta^i X^j, \quad (2.54)$$

$$\Theta = \frac{1}{1.35} (\log \tau + 2.65), \quad (2.55)$$

$$X = \frac{1}{2.5} (\log x + 1.50), \quad (2.56)$$

$$W_{ee}(\tau) = m_e c^2 n_e^2 \sigma_T c \alpha \tau^{3/2} G(\tau), \quad (2.57)$$

$$G(\tau) = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \sum_{i=0}^{10} b_i \Theta^i, \quad (2.58)$$

但し、 $\tau = k_B T / m_e c^2$ 、 $x = k / \tau$ である。また、Fitting 係数 a_{ij}^I 、 b_i^I は以下のようにになっている。本研究の Fitting 関数はこの Fitting 関数を参考に温度領域を決定した。それは、非相対論領域と相対論領域を繋ぐ計算を行う為である。

表 2.1: Fitting 係数 a_{ik}^I (Itoh, Kawana, & Nozawa 2002a より参照)

| | $k = 0$ | $k = 1$ | $k = 2$ | $k = 3$ | $k = 4$ | $k = 5$ |
|--------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $i=0$ | 3.15847E+0 | -2.52430E+0 | 4.04877E-1 | 6.13466E-1 | 6.28867E-1 | 3.29441E-1 |
| $i=1$ | 2.46819E-2 | 1.03924E-1 | 1.98935E-1 | 2.18843E-1 | 1.20482E-1 | -4.82390E-2 |
| $i=2$ | -2.11118E-2 | -8.53821E-2 | -1.52444E-1 | -1.45660E-1 | -4.63705E-2 | 8.16592E-2 |
| $i=3$ | 1.24009E-2 | 4.73623E-2 | 7.51656E-2 | 5.07201E-2 | -2.25247E-2 | -8.17151E-2 |
| $i=4$ | -5.41633E-3 | -1.91406E-2 | -2.58034E-2 | -2.23048E-3 | 5.07325E-2 | 5.94414E-2 |
| $i=5$ | 1.70070E-3 | 5.39773E-3 | 4.13361E-3 | -1.14273E-2 | -3.23280E-2 | -2.19399E-2 |
| $i=6$ | -3.05111E-4 | -7.26681E-4 | 4.67015E-3 | 1.24789E-2 | -1.16976E-2 | -1.13488E-2 |
| $i=7$ | -1.21721E-4 | -7.47266E-4 | -2.20675E-3 | -2.74351E-3 | -1.00402E-3 | -2.38863E-3 |
| $i=8$ | 1.77611E-4 | 8.73517E-4 | -2.67582E-3 | -4.57871E-3 | 2.96622E-2 | 1.89850E-2 |
| $i=9$ | -2.05480E-5 | -6.92284E-5 | 2.95254E-5 | -1.70374E-4 | -5.43191E-4 | 2.50978E-3 |
| $i=10$ | -3.58754E-5 | -1.80305E-4 | 1.40751E-3 | 2.06757E-3 | -1.23098E-2 | -8.81767E-3 |
| | $k = 6$ | $k = 7$ | $k = 8$ | $k = 9$ | $k = 10$ | |
| $i=0$ | -1.71486E-1 | -3.68685E-1 | -7.59200E-2 | 1.60187E-1 | 8.37729E-2 | |
| $i=1$ | -1.20811E-1 | -4.46133E-4 | 8.88749E-2 | 2.50320E-2 | -1.28900E-2 | |
| $i=2$ | 9.87296E-2 | -3.24743E-2 | -8.82637E-2 | -7.52221E-3 | 1.99419E-2 | |
| $i=3$ | -4.59297E-2 | 5.05096E-2 | 5.58818E-2 | -9.11885E-3 | -1.71348E-2 | |
| $i=4$ | -2.11247E-2 | -5.05387E-2 | 9.20453E-3 | 1.67321E-2 | -3.47663E-3 | |
| $i=5$ | 1.76310E-2 | 2.23352E-2 | -4.59817E-3 | -8.24286E-3 | -3.90032E-4 | |
| $i=6$ | 6.31446E-2 | 1.33830E-2 | -8.54735E-2 | -6.47349E-3 | 3.72266E-2 | |
| $i=7$ | -2.28987E-3 | 7.79323E-3 | 7.98332E-3 | -3.80435E-3 | -4.25035E-3 | |
| $i=8$ | -8.84093E-2 | -2.93629E-2 | 1.02966E-1 | 1.38957E-2 | -4.22093E-2 | |
| $i=9$ | 4.45570E-3 | -2.80083E-3 | -5.68093E-3 | 1.10618E-3 | 2.33625E-3 | |
| $i=10$ | 3.46210E-2 | 1.23727E-2 | -4.04801E-2 | -5.68689E-3 | 1.66733E-2 | |

表 2.2: Fitting 係数 b_i^I (Itoh, Kawana, & Nozawa 2002a より参照)

| | b_i^I |
|--------|-------------|
| $i=0$ | 2.21564E+0 |
| $i=1$ | 1.83879E-1 |
| $i=2$ | -1.33575E-1 |
| $i=3$ | 5.89871E-2 |
| $i=4$ | -1.45904E-2 |
| $i=5$ | -7.10244E-4 |
| $i=6$ | 2.80940E-3 |
| $i=7$ | -1.70485E-3 |
| $i=8$ | 5.26075E-4 |
| $i=9$ | 9.94159E-5 |
| $i=10$ | -1.06851E-4 |

2.3.3 中間領域

• 散乱断面積

Haug(1975a)において、相対論的電子 - 電子熱制動放射の散乱断面積が計算された。今回我々はこの解析式を用いて計算を行った。

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{\rho^2 - 4}}{\pi} \int Ad\Omega_{p'_i} \tag{2.59} \\
&= \sqrt{\rho^2 - 4} \left\{ \frac{\omega^2 + \rho^2}{4x_1x_2} \left(\frac{x_1 - x_2}{x} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right)^2 - \frac{\rho^2}{2x^2} + \frac{2\rho^2}{(\omega^2 - 4)x_1x_2} \left(1 + \frac{1}{\omega^2 - 4} \right) \right\} \\
&+ \frac{4\rho^2}{\omega^2(\omega^2 - 4)x_1^4} \left[3 \frac{(\omega^2 - 2)^2}{\omega^2 - 4} x_1x_2 - 2x^2 \left\{ 1 + \frac{6}{\omega^2(\omega^2 - 4)} \right\} \right] - \frac{4\rho^2x}{(\omega^2 - 4)x_1^3} \\
&+ \frac{\rho^2}{x_1^2} \left[\frac{4}{\omega^2} - \frac{3}{2} - \frac{8}{\omega^2(\omega^2 - 4)^2} + \frac{(\omega^2 - 2)x}{\omega^2(\omega^2 - 4)} - \frac{\rho^2}{(\omega^2 - 4)x_1} \right. \\
&+ \left. \frac{1}{R_1} \left[\frac{\omega^2 - 4x_2}{\rho^2} - \frac{\omega^2(\omega^2 - 4)}{4x_1x_2} - \frac{4}{x_1} + \frac{1}{x_1^2} \left(\omega^2 - \frac{\omega^2 - 2}{2}\rho^2 \right) \right] \right\} \\
&+ \frac{L}{\sqrt{R_1}} \left\{ 4 + \frac{1}{x_2} \left(10 - \frac{\omega^2}{2} \right) - \frac{2}{x_1} (2\omega^2 - x_2 + 4) + \frac{3\omega^2(\omega^2 - 4)}{4x_1x_2} \right. \\
&+ \left. \frac{4}{x_1R_2} \left(x_2 - 3x_1 + 4 + 2\frac{\rho^2 - 3}{x_1} \right) + \frac{\omega^2 - 4 - 4x_1\frac{x_2}{\rho^2}}{x_1R_1} \left[\frac{\omega^2R_2}{4x_2} - (\rho^2 - 2) - 2x_1 \right] \right\} \\
&+ \rho L_1 \left\{ \frac{\rho^2 + 2}{x^2} + \frac{8}{x_1^2} \right\} + \frac{L_2}{W_2} \left\{ 2\frac{\omega^2 - 2}{x_2} - \frac{\rho^2 - 2 - x_2}{x_1} + \frac{\rho^2 - 2}{2x} (\rho^2 + x_1) + \frac{\omega^2 - 4}{R_2} \right. \\
&- \left. 2 + \frac{\rho^2 - 2}{8xx_1} (\omega^2 + \rho^2 - 4)^2 + \frac{1}{R_2x_1} \left[(\rho^2 - 2) \left\{ \left(\frac{\omega^2 + \rho^2}{2} - 2 \right) x_2 - (\omega^2 - 2) \right\} - 2x_2^2 - 4x_2 \right] \right. \\
&+ \left. \frac{1}{R_2x} \left[\frac{\rho^2 - 2}{2} \{ 3(\rho^2 - 4) - \omega^2(\rho^2 - 5) \} + 2x_1^2 - 6x_1 + (\omega^2 - 2)x_2 \right] \right\} \\
&+ \frac{2\rho L_3}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4}x_1} \left\{ 4 + \frac{8(\omega^2 - 2)}{(\omega^2 - 4)^2} - \frac{3(\omega^2 - 2)}{2x_2} + \frac{1}{x_1} \left[x_2^2 - 2\omega^2 - (\omega^2 - 1)x_2 + \frac{1}{2}(\omega^2 - 2)^2 \right] \right. \\
&+ \left. \frac{\rho^2}{2x} (\rho^2 - 2) - \frac{x_2}{2x} (\omega^2 - 2) - \frac{\omega^2 + \rho^2 - 4}{4xx_2} (\omega^2 - 2)^2 + \frac{x}{4x_1x_2} [(\omega^2 - 2)^2 \right. \\
&+ \left. (\rho^2 - 2)(\rho^2 - 4) - 8\frac{\rho^2 - 2}{\omega^2 - 4}] + \frac{4x^2}{\omega^2(\omega^2 - 4)x_1} - \frac{1}{R_2} [2(\rho^2 - 2)x_2 + (\omega^2 - 4)x - 4(\omega^2 - 2) \right. \\
&+ \left. \frac{8 - \rho^2}{2x_1} (\omega^2 - 2)] + \frac{1}{xR_2} \left[\frac{\rho^2 - 2}{2} \{ 3(\rho^2 - 4) - \omega^2(\rho^2 - 5) \} - x_1(\omega^2 - 2x_1 + 4) \right] \right. \\
&+ \left. \frac{2}{(\omega^2 - 4)^2x_1} \left[\omega^2(\omega^2 - 2)(\rho^2 - 4) - 2(\rho^2 - 2) + 4\frac{\rho^2}{\omega^2} \right] + \frac{4(\omega^2 - 2)x}{(\omega^2 - 4)x_1^2} \left[\frac{12x}{\omega^2(\omega^2 - 4)} - \frac{\rho^2 - 2}{2} \right] \right. \\
&\times \left. \left[1 - \frac{x}{\omega^2x_1} \right] \right\} - \frac{L_4}{W_4} \left\{ 1 + \frac{\rho^2 - 2}{8x_1x_2} [(\omega^2 - 2)^2 + (\rho^2 - 2)^2 - 6(\omega^2 + \rho^2 - 4) + \frac{16x}{\omega^2 - 4}] \right. \\
&+ \left. \frac{2}{x_1x_2} (1 - x_1 - x_1^2) + \frac{1}{\omega^2 - 4} \left(\rho^2 - 4 - \frac{8}{\omega^2 - 4} \right) \right\} + \{x_1 \leftrightarrow x_2\}. \tag{2.60}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^2 = 2 [(p_1 p_2) + 1] \\
\rho^2 &= (\mathbf{P}'_1 + \mathbf{P}'_2)^2 = 2 [(p'_1 p'_2) + 1] \\
x_1 &= (k p_1), x_2 = (k p_2) \\
x &= (k p_1) + (k p_2) = \frac{\omega^2 - \rho^2}{2} \\
R_1 &= \rho^2 - 4 + 4x_1 + 4\frac{x_1^2}{\rho^2} \\
R_2 &= \rho^2 - 4 + 2x_1 = \omega^2 - 4 - 2x_2 \\
W_2 &= \sqrt{x_2 \left(\frac{\rho^2 - 4}{4} x_2 + 2\frac{x_1}{\rho^2} \right)} \\
W_4 &= \sqrt{(\omega^2 - 4) \left[\frac{1}{4} (\omega^2 - 4) (\rho^2 - 4) + 4\frac{x_1 x_2}{\rho^2} \right]} \\
L &= \ln \left\{ \frac{\rho}{4x_1} \left[R_2 + \sqrt{(\rho^2 - 4)R_1} \right] \right\} \\
L_1 &= \ln \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - 4}}{2} \\
L_2 &= \ln \left\{ 1 + \frac{\rho^2}{4x_1} \left[(\rho^2 - 4) x_2 + 2\sqrt{\rho^2 - 4}W_2 \right] \right\} \\
L_3 &= \ln \frac{(\omega\sqrt{\rho^2 - 4} + \rho\sqrt{\omega^2 - 4})^2}{4(\omega^2 - \rho^2)} \\
L_4 &= \ln \left\{ 1 + \frac{\rho^2}{8x_1 x_2} \left[(\omega^2 - 4) (\rho^2 - 4) + 2\sqrt{\rho^2 - 4}W_4 \right] \right\}
\end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ は始状態電子の 4 次元ベクトル、 p_1, p_2 は始状態電子の 3 次元ベクトル、 $\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}'_2$ は終状態電子の 4 次元ベクトル、 p'_1, p'_2 は終状態電子の 3 次元ベクトルを表す。

•PPR,

Stepney & Guilbert(1983) において、相対論的電子 - 電子熱制動放射の PPR が計算され、Fitting が行われた ($50\text{keV} \leq \tau \leq 1\text{MeV}, 0.05 \leq x \leq 10$)。PPR は

$$P_{ee}(k, \tau) = \frac{dN_{ee}}{dV dt dk} = \frac{cn_e^2}{[2\tau K_2(1/\tau)]^2} \int d\epsilon_1 e^{-\epsilon_1/\tau} \int d\epsilon_2 e^{-\epsilon_2/\tau} \int d\mu \sqrt{\mu^2 - 1} \frac{d\sigma}{dk}, \quad (2.61)$$

$$\frac{d\sigma}{dk} = \frac{3}{8\pi^2} \alpha \sigma_T \int d\Omega_k \frac{k}{\omega \rho} \sqrt{\frac{\rho^2 - 4}{\omega^2 - 4}} f_{ee} \frac{1}{\pi} \int A d\Omega_{p'_1}, \quad (2.62)$$

によって与えられる。この PPR 計算は次章で詳しく説明する。

また、Stepney & Guilbert(1983) で行われた Fitting 関数は以下のようにになっている。

$$\begin{aligned}
G_{SG}(x, \tau) &= (A + Bx) \ln\left(\frac{1}{x}\right) + C + Dx \quad 0.05 \leq x \leq 1.1 \\
&= \alpha x^2 + \beta x + \gamma + \frac{\delta}{x} \quad 1.0 \leq x \leq 10.0
\end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned}
G_{SG}(\tau) &= \sqrt{\tau} (0.797A + 0.164B + 0.632C + 0.264D \\
&\quad + 1.839\alpha + 0.736\beta + 0.368\gamma + 0.219\delta)
\end{aligned} \quad (2.64)$$

表 2.3: Fitting 係数 A, B, C, D $0.05 \leq x \leq 1.1$ (Stepney & Guilbert 1983 より参照)

| $k_B T$ [keV] | A | B | C | D |
|---------------|-------|---------|-------|-------|
| 50 | 1.584 | 0.578 | 4.565 | 2.091 |
| 75 | 1.357 | 0.437 | 3.842 | 1.855 |
| 100 | 1.197 | 0.291 | 3.506 | 1.672 |
| 150 | 1.023 | 0.204 | 3.036 | 1.593 |
| 200 | 0.883 | 0.0835 | 2.831 | 1.487 |
| 300 | 0.700 | -0.0494 | 2.545 | 1.364 |
| 400 | 0.572 | -0.139 | 2.352 | 1.254 |
| 500 | 0.484 | -0.181 | 2.175 | 1.179 |
| 600 | 0.417 | -0.209 | 2.028 | 1.108 |
| 700 | 0.361 | -0.240 | 1.914 | 1.030 |
| 800 | 0.322 | -0.244 | 1.795 | 0.982 |
| 900 | 0.286 | -0.257 | 1.705 | 0.923 |
| 1000 | 0.259 | -0.258 | 1.617 | 0.879 |

表 2.4: Fitting 係数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ $1.0 \leq x \leq 10.0$ (Stepney & Guilbert 1983 より参照)

| $k_B T$ [keV] | A | B | C | D |
|---------------|--------|-------|-------|-------|
| 50 | 0.0387 | 0.523 | 5.319 | 0.782 |
| 75 | 0.0633 | 0.540 | 4.412 | 0.689 |
| 100 | 0.0862 | 0.569 | 3.897 | 0.633 |
| 150 | 0.128 | 0.596 | 3.383 | 0.523 |
| 200 | 0.159 | 0.658 | 2.974 | 0.532 |
| 300 | 0.208 | 0.633 | 2.738 | 0.326 |
| 400 | 0.234 | 0.643 | 2.424 | 0.302 |
| 500 | 0.245 | 0.695 | 2.025 | 0.394 |
| 600 | 0.248 | 0.729 | 1.716 | 0.453 |
| 700 | 0.247 | 0.756 | 1.457 | 0.500 |
| 800 | 0.243 | 0.763 | 1.271 | 0.515 |
| 900 | 0.239 | 0.755 | 1.140 | 0.508 |
| 1000 | 0.235 | 0.735 | 1.060 | 0.478 |

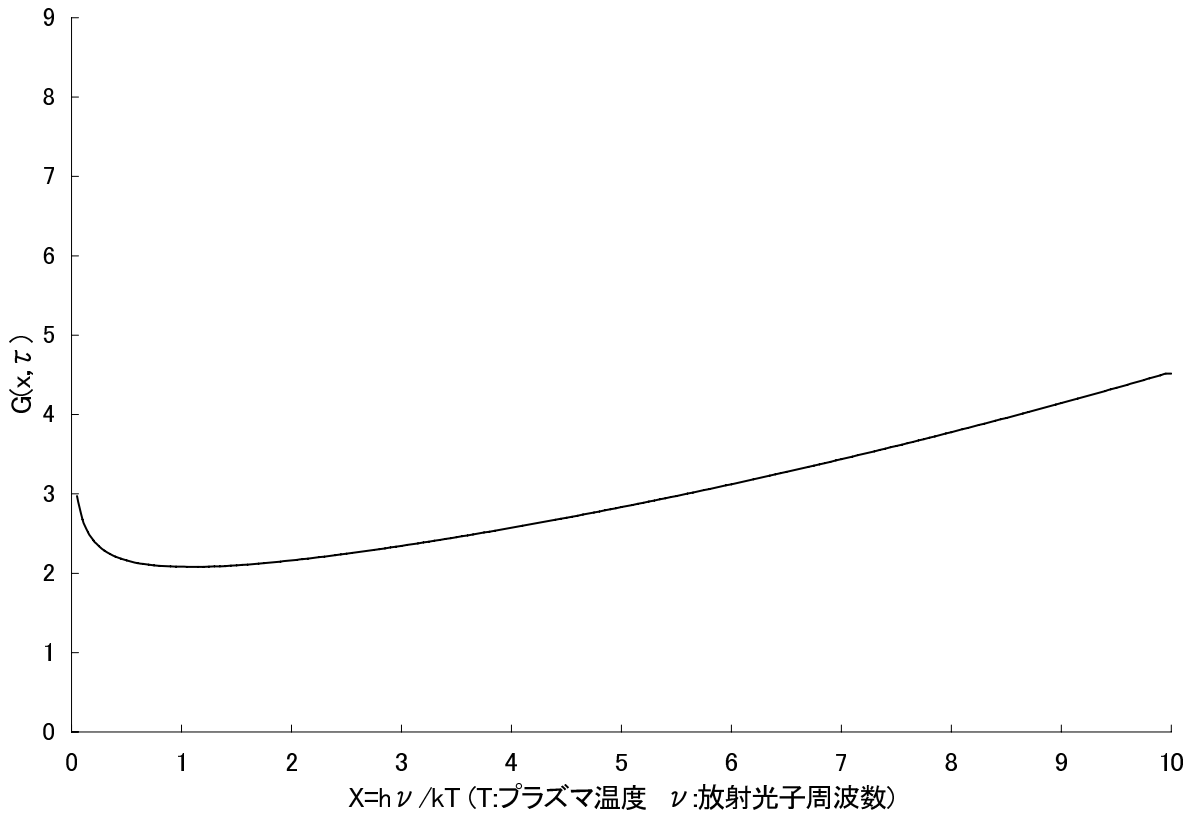


図 2.18: 電子 - 電子熱制動放射 PPR SG Fitting 計算 $k_B T = 50\text{keV}$

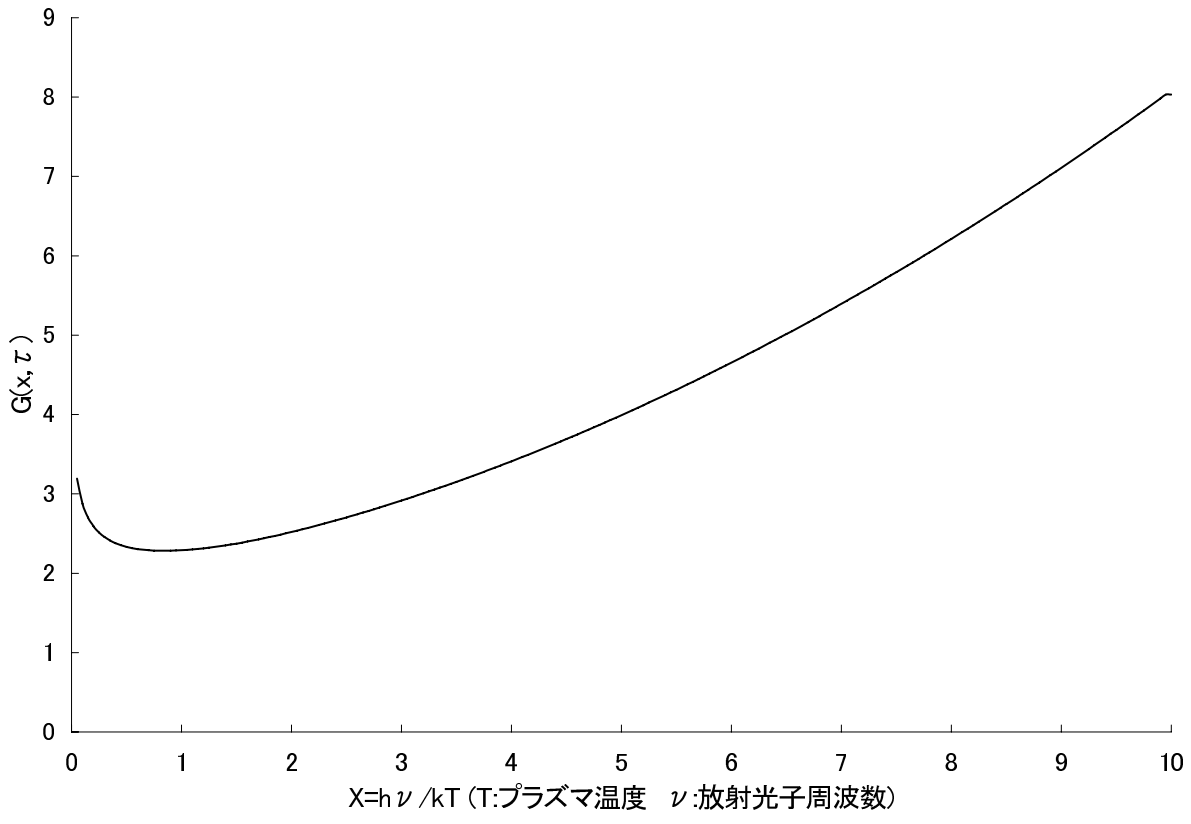


図 2.19: 電子 - 電子熱制動放射 PPR SG Fitting 計算 $k_B T = 100\text{keV}$

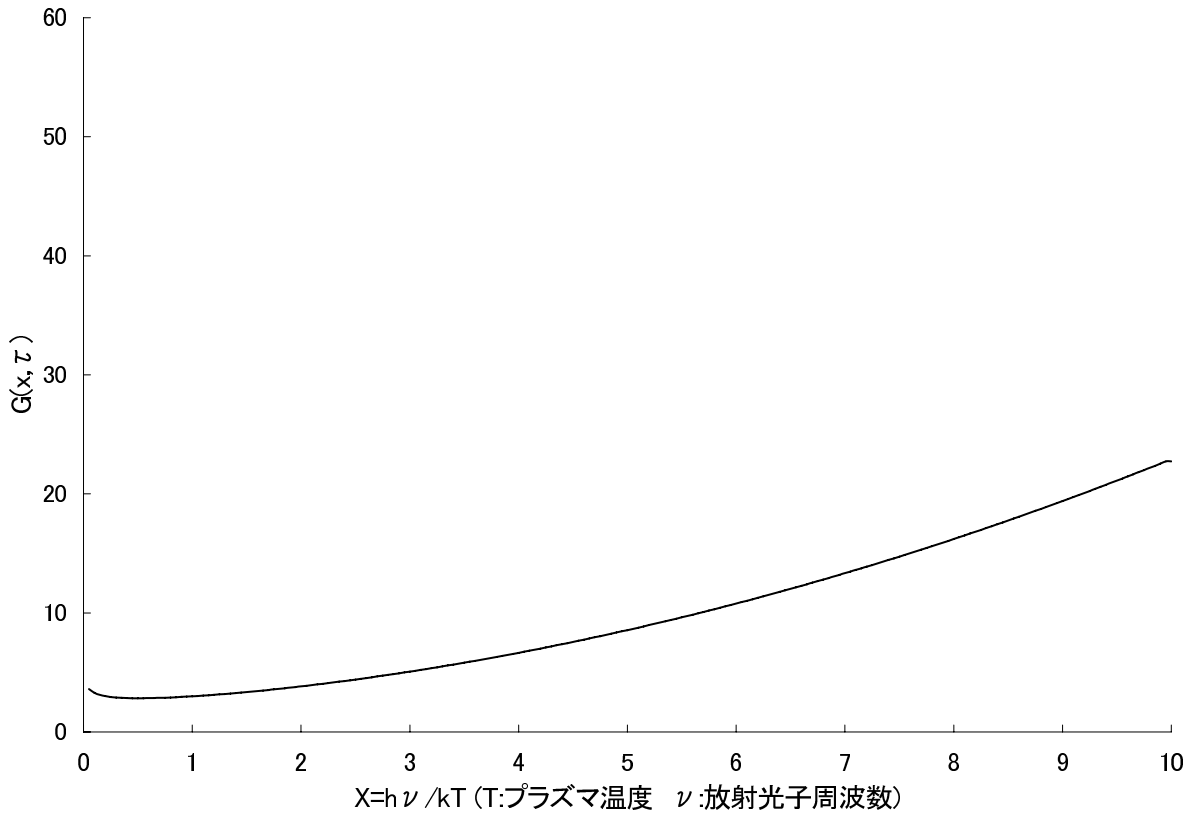


図 2.20: 電子 - 電子熱制動放射 PPR SG Fitting 計算 $k_B T = 300\text{keV}$

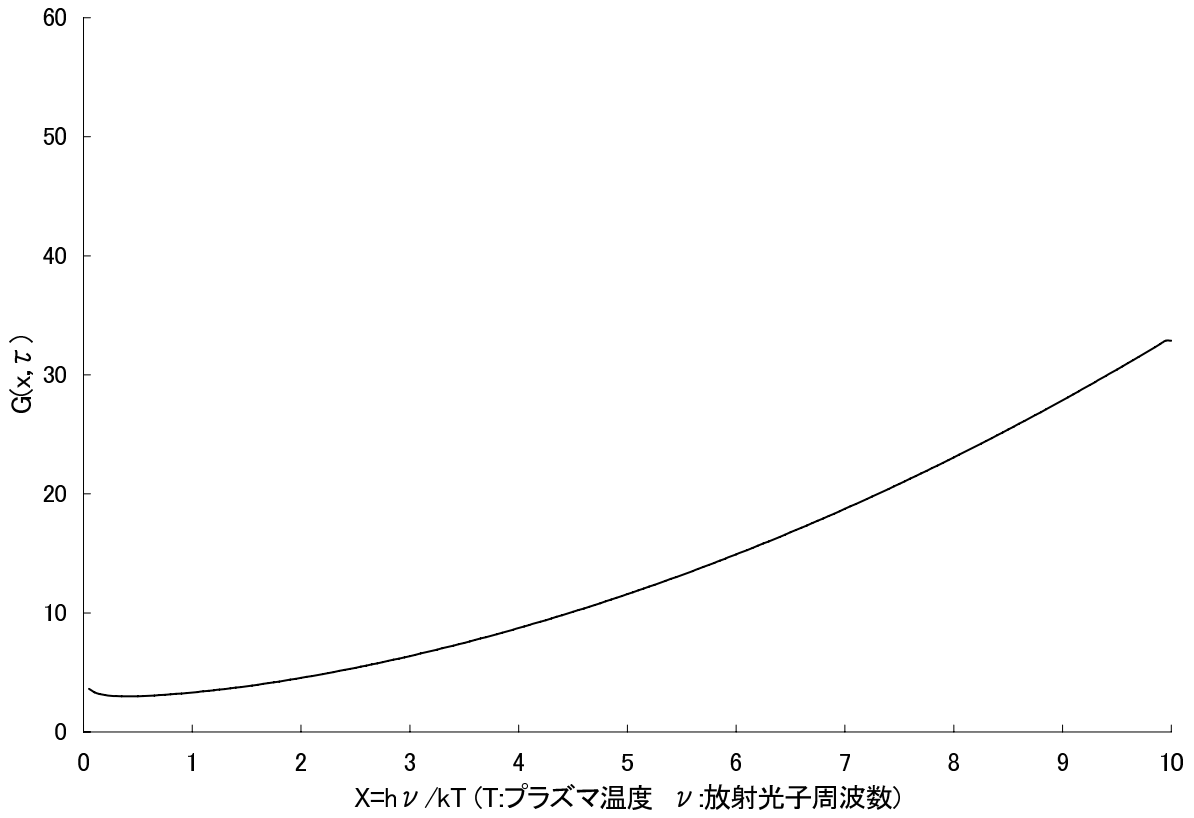


図 2.21: 電子 - 電子熱制動放射 PPR SG Fitting 計算 $k_B T = 500\text{keV}$

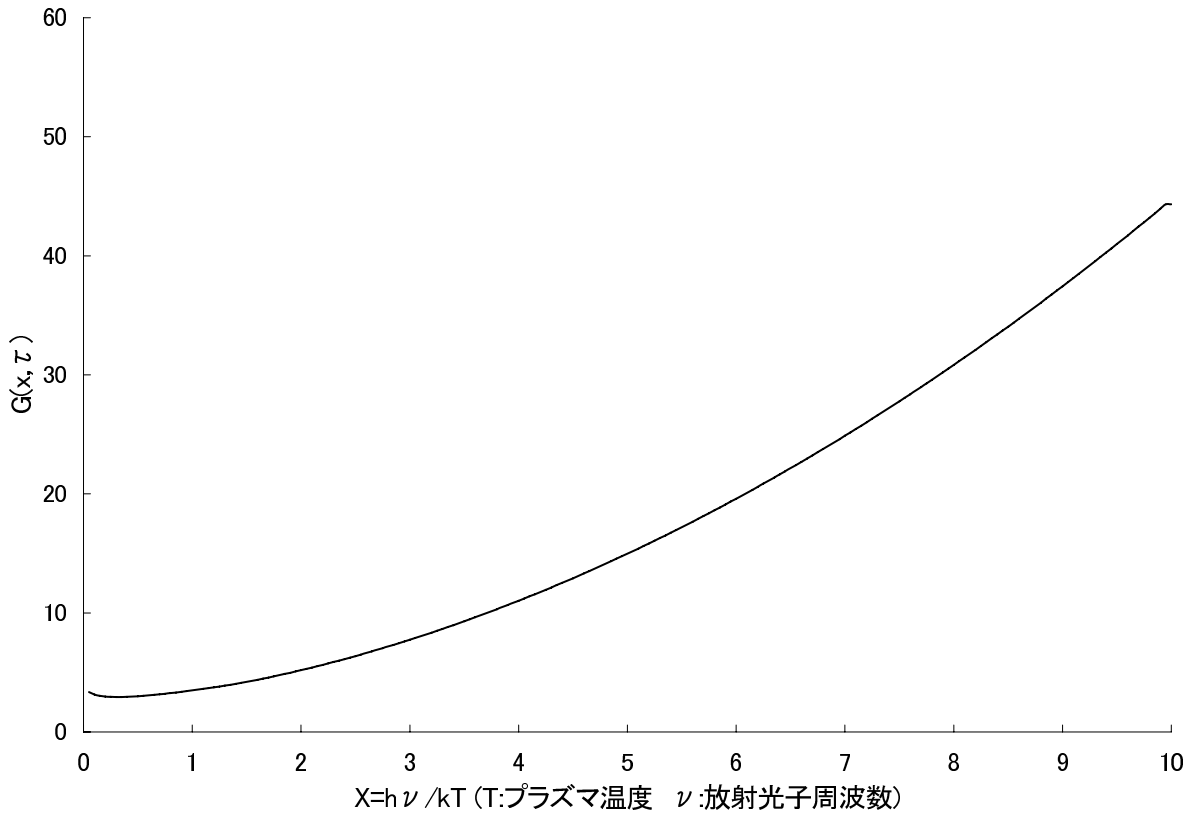


図 2.22: 電子 - 電子熱制動放射 PPR SG Fitting 計算 $k_B T = 1\text{MeV}$

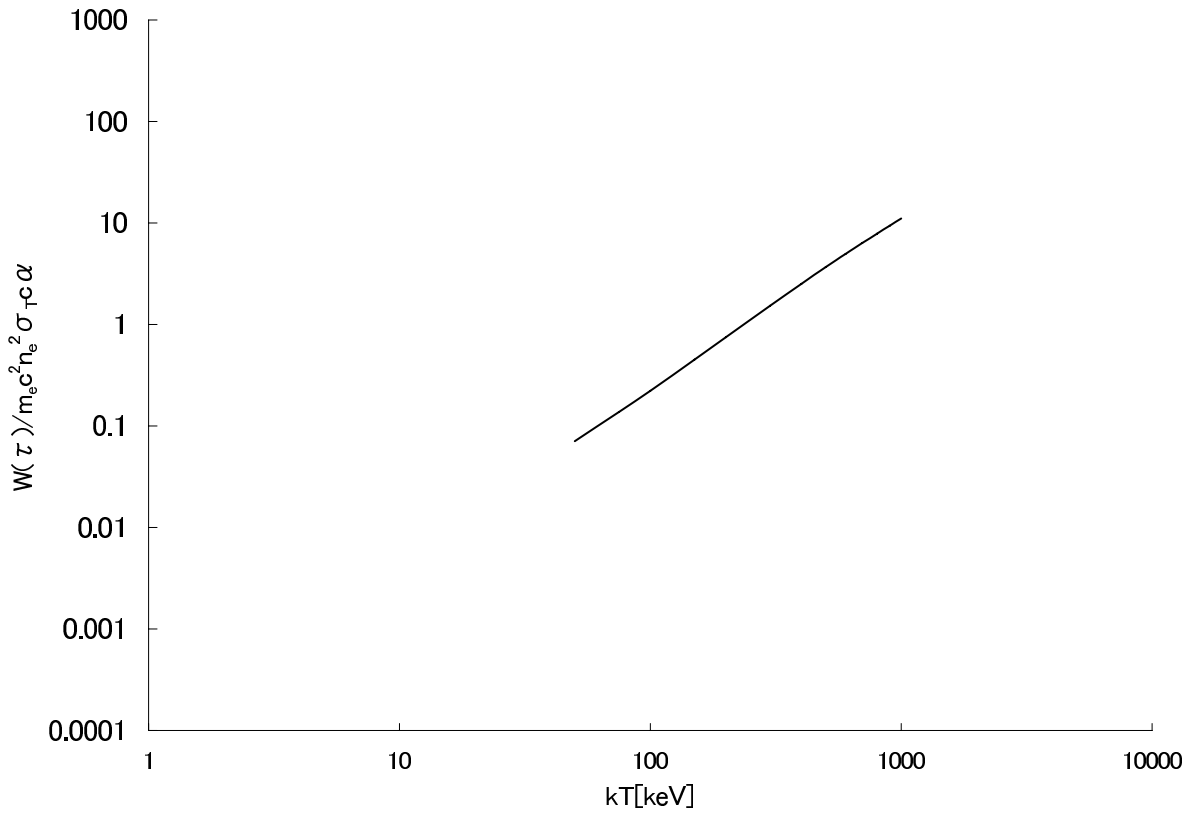


圖 2.23: 電子 - 電子熱制動放射 Emissivity SG Fitting 計算

2.3.4 超相対論領域

Alexanian(1968)の論文において、超相対論的電子 - 電子熱制動放射の PPR と Emissivity が計算された。

$$P_{ee}^{ER}(k, \tau) = n_e^2 \sigma_T c \alpha \frac{e^{-x}}{x} \frac{1}{\sqrt{\tau}} G^{ER}(x, \tau), \quad (2.65)$$

$$G^{ER}(x, \tau) = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left\{ \frac{28}{3} + 2x + \frac{1}{2}x^2 + 2 \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3}x + x^2 \right) \ln \frac{2\tau}{\gamma} - e^x E_i(-x) \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{3}x + x^2 \right) \right\}, \quad (2.66)$$

$$E_i(-x) = - \int_x^\infty dt \frac{e^{-t}}{t}, \quad (2.67)$$

$$W_{ee}^{ER}(\tau) = m_e c^2 n_e^2 \sigma_T c \alpha \tau^{3/2} G^{ER}(\tau), \quad (2.68)$$

$$G^{ER}(\tau) = \frac{9}{\pi \sqrt{\tau}} \left(\ln \frac{2\tau}{\gamma} + \frac{5}{4} \right), \quad (2.69)$$

但し、 $E_i(-x)$ は指数積分関数であり、 $\gamma = e^C$ and $C = 0.57721 \dots$ はオイラー定数である。この導出は付録に載せた。

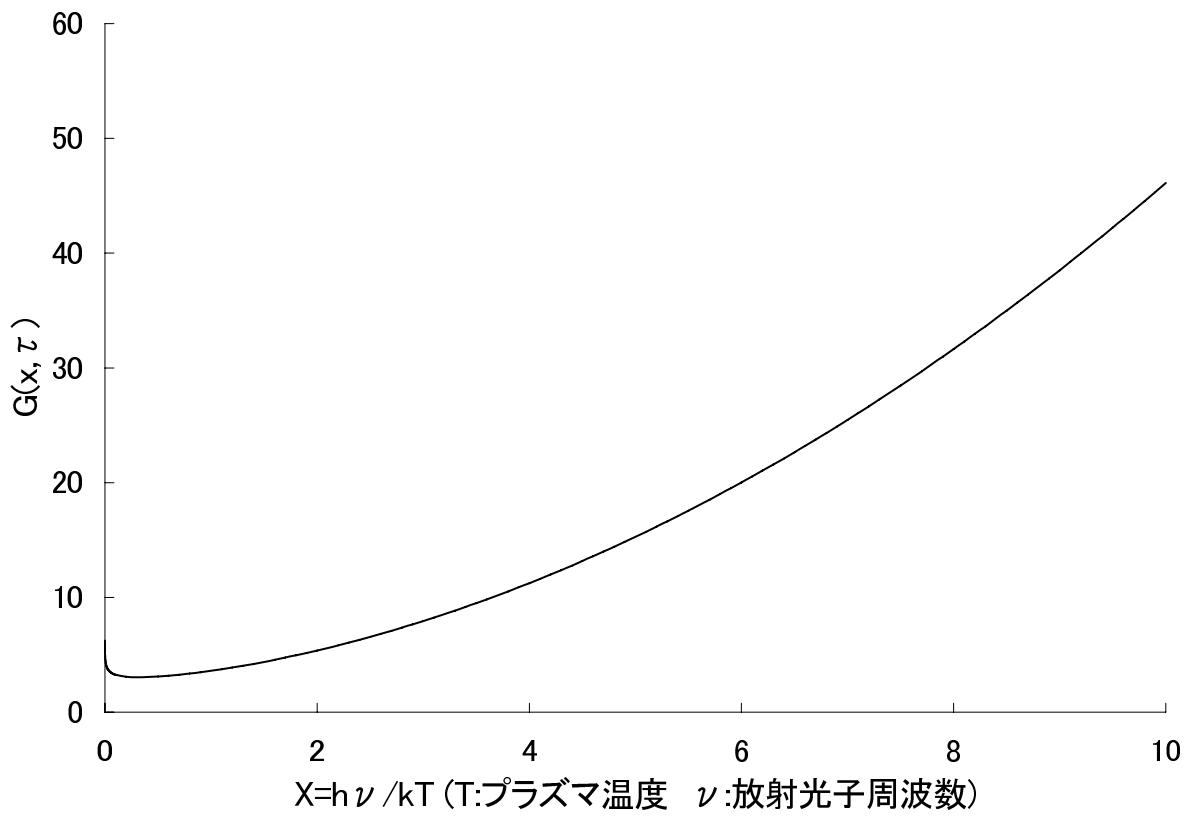


図 2.24: 超相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR $k_B T = 1\text{MeV}$

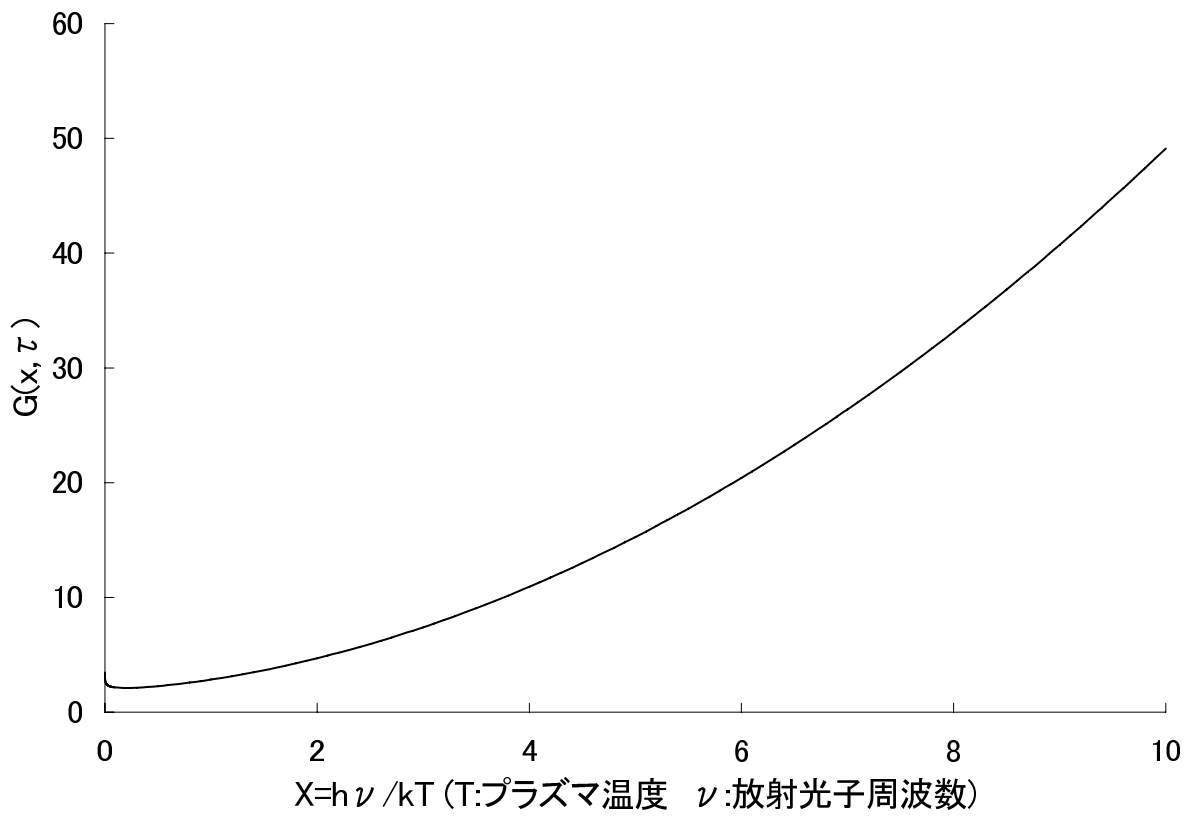


図 2.25: 超相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR $k_B T = 5\text{MeV}$

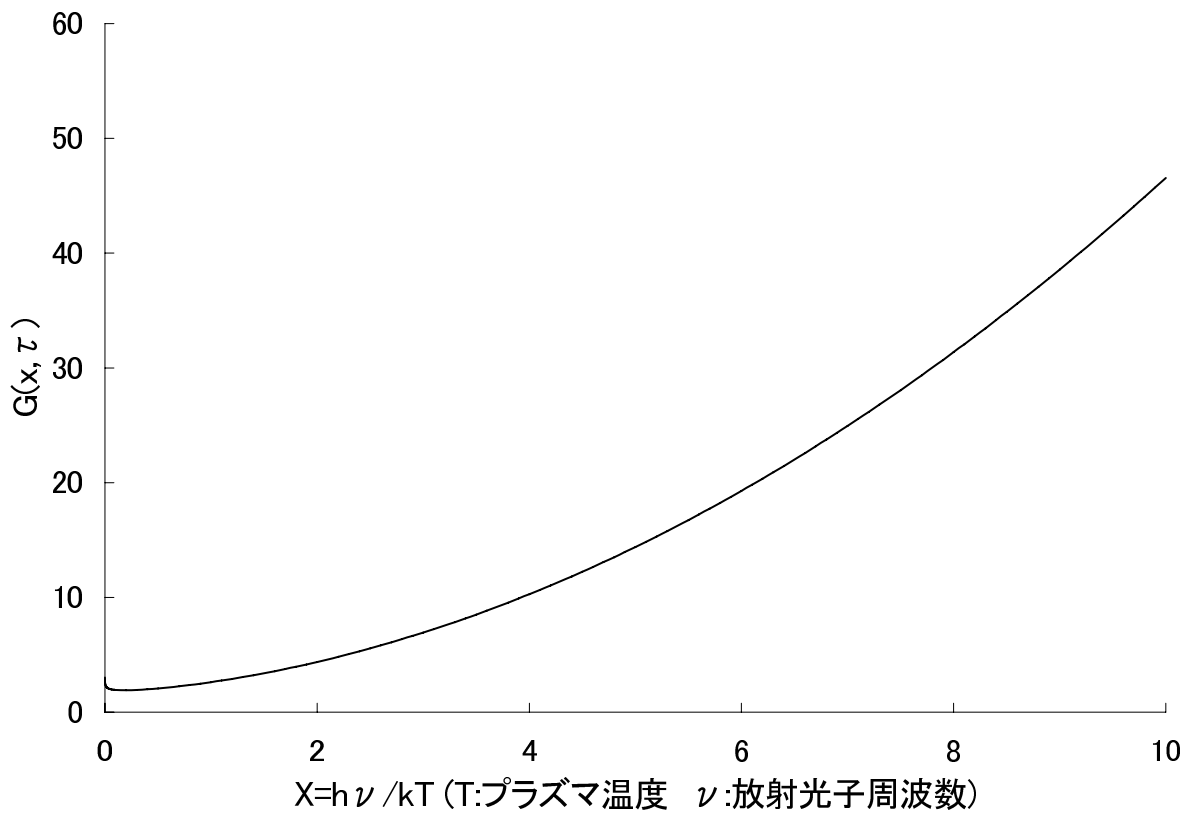


図 2.26: 超相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR $k_B T = 7\text{MeV}$

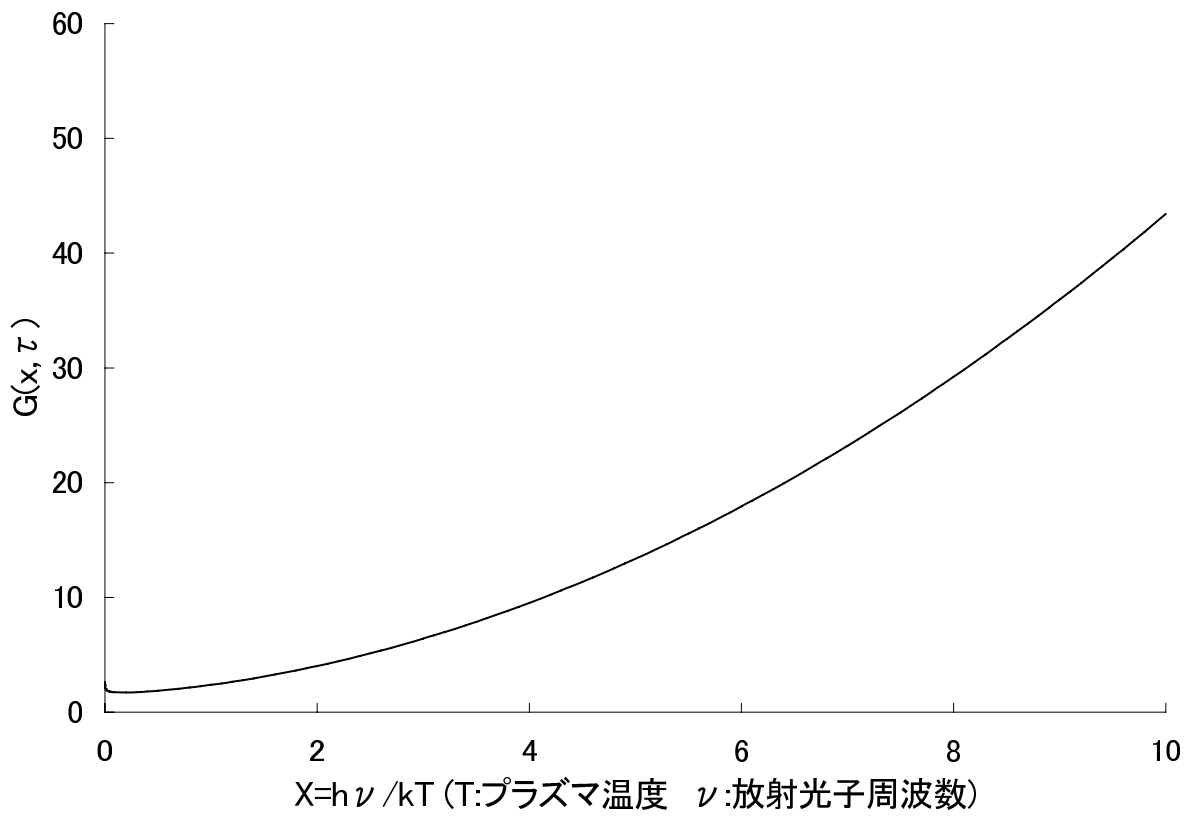


図 2.27: 超相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR $k_B T = 10\text{MeV}$

第3章 研究内容

3.1 理論

3.1.1 散乱断面積

先に変数について記述しておく。

p_1, p_2 : 始状態電子の 4 元運動量ベクトル

p_3, p_4 : 終状態電子の 4 元運動量ベクトル

k : 光子の 4 元運動量ベクトル

$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$: 始状態電子の 3 元運動量ベクトル

$\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$: 終状態電子の 3 元運動量ベクトル

\mathbf{k} : 光子の 3 元運動量ベクトル

E_1, E_2 : 始状態電子のエネルギー

E_3, E_4 : 終状態電子のエネルギー

k_0 : 光子のエネルギー

本研究では Haug(1975a) の論文から散乱断面積 (2.60) を用いて PPR や Emissivity の計算を行った。この節で導出する断面積を用いた計算方法では、7 重積分を行う必要がある。Haug(1975a) ではそのうちの立体角積分を解析的に求める事に成功している。その為、最終的な PPR の計算を 5 重積分で行う事が出来る。今回の研究では、高精度計算の実現と Fitting 式の導出も視野に入れて行った為、計算時間の短縮は大変有用である。このような理由から Haug(1975a) の論文を用いて散乱断面積積分を行った。従って、Haug(1975a) における散乱断面積 (2.60) の正当性を、それぞれの過程から導出された散乱断面積との比較により確かめる。電子 - 電子熱制動放射過程として、次の 8 種類を考えた。それらに従って散乱断面積の議論を行っていく。

まず、散乱断面積は

$$\begin{aligned}
 d\sigma &= e^6 \left(\frac{m}{E_1 V} \right) \left(\frac{m}{E_2 V} \right) \left(\frac{m}{E_3 V} \right) \left(\frac{m}{E_4 V} \right) \left(\frac{1}{2k_0 V} \right) (2\pi)^8 \delta^8(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \\
 &\times \left(\frac{1}{2m} \right)^4 \times \frac{1}{4} \sum_{spins} |Tr|^2 \times \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 \mathbf{k} \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 \mathbf{p}_3 \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 \mathbf{p}_4 \\
 &\times \frac{V}{|v_1 - v_2|} \times \frac{1}{T}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

と与えられる。但し、

$$\sum_{spins} |Tr|^2 = T_{11} + T_{12} + T_{13} + T_{14} + T_{22} + T_{23} + T_{24} + T_{33} + T_{34} + T_{44} \tag{3.2}$$

である。上式の $\sum_{spins} |Tr|^2$ は Trace 計算によって求めることが出来る。今回、この計算は式が長く

煩雑な為、詳細は付録に載せた。ここでは、 $\sum_{spins} |Tr|^2$ の計算を終えたものとする。これより、

$$\begin{aligned}
d\sigma &= e^6 \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m^4}} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k_0} \frac{d^3\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3\mathbf{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} \\
&\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \times \frac{1}{4} \sum_{spins} |Tr|^2 \\
&= \frac{\alpha r_0^2}{64\pi^2} \frac{1}{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m^4}} d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p}_3 d^3\mathbf{p}_4 \\
&\quad \times \delta^4(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \frac{m^2}{k_0 E_3 E_4} \sum_{spins} |Tr|^2 \\
&= \frac{\alpha r_0^2}{64\pi^2} \frac{1}{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m^4}} d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p}_3 \\
&\quad \times \delta(E_3 + E_4 + k_0 - E_1 - E_2) \frac{m^2}{k_0 E_3 E_4} \sum_{spins} |Tr|^2 \tag{3.3}
\end{aligned}$$

を得る。但し、 α は微細構造定数、 r_0 は電子の古典半径である。
次にデルタ関数について。公式より、デルタ関数は、

$$\delta\{f(|\mathbf{p}_3|)\} = \frac{1}{|f'(|\mathbf{p}_3|)|} \delta(|\mathbf{p}_3| - p_3) \tag{3.4}$$

と与えられる。今回は

$$\begin{aligned}
f(|\mathbf{p}_3|) &= E_1 + E_2 - k_0 - E_3 - E_4 \\
&= E_1 + E_2 - k_0 - \sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m^2} - \sqrt{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k} - \mathbf{p}_3)^2 + m^2} \tag{3.5}
\end{aligned}$$

の場合について考えている。 E_4 を微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{dE_4}{d|\mathbf{p}_3|} &= \frac{1}{2E_4} \left\{ 2|\mathbf{p}_3| - \frac{2\mathbf{p}_3}{|\mathbf{p}_3|} \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) \right\} \\
&= \frac{1}{E_4} \{ |\mathbf{p}_3| - \hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) \} \tag{3.6}
\end{aligned}$$

となる。これを用いて、

$$\begin{aligned}
f'(|\mathbf{p}_3|) &= -\frac{|\mathbf{p}_3|}{E_3} - \frac{1}{E_4} \{ |\mathbf{p}_3| - \hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) \} \\
&= -\frac{1}{E_3 E_4} \{ |\mathbf{p}_3| (E_3 + E_4) - E_3 \hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) \} \\
&= -\frac{1}{E_3 E_4} \{ |\mathbf{p}_3| (E_1 + E_2 - k_0) - E_3 \hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) \} \tag{3.7}
\end{aligned}$$

とすることが出来る。よって、

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{E_3 E_4} d^3 \mathbf{p}_3 \delta(E_1 + E_2 - k_0 - E_3 - E_4) \\
&= \frac{1}{E_3 E_4} d\Omega_{\mathbf{p}_3} d\mathbf{p}_3 p_3^2 \frac{\widetilde{E}_3 E_4 \delta(|\mathbf{p}_3| - \widetilde{p}_3)}{\left| \widetilde{p}_3 (E_1 + E_2 - k_0) - \widetilde{E}_3 \hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) \right|} \\
&= \frac{d\Omega_{p_3} p_3^2}{\left| \widetilde{p}_3 (E_1 + E_2 - k_0) - \widetilde{E}_3 \hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) \right|} \tag{3.8}
\end{aligned}$$

となる。以上より散乱断面積

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \frac{\alpha r_0^2}{64\pi^2} \frac{1}{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m^4}} d\Omega_k dk_0 d\Omega_{p_3} \\
&\times \frac{k_0 p_3^2 m^2}{\left| p_3 (E_1 + E_2 - k_0) - E_3 \hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) \right|} \sum_{spins} |Tr|^2 \tag{3.9}
\end{aligned}$$

を得る。また、微分断面積は

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\sigma}{d\Omega_k dk_0} &= \frac{\alpha r_0^2}{64\pi^2} \frac{m^2}{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m^4}} \\
&\times \int d\Omega_{p_3} \frac{k_0 \widetilde{p}_3^2}{\left| \widetilde{p}_3 (E_1 + E_2 - k_0) - \widetilde{E}_3 \hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) \right|} \sum_{spins} |Tr|^2 \\
&= \frac{\alpha r_0^2}{64\pi^2} \frac{m^2}{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m^4}} \\
&\times \int d\Omega_{p_3} \frac{k_0 \widetilde{p}_3^2}{W} \sum_{spins} |Tr|^2 \tag{3.10}
\end{aligned}$$

となる。ここで、 W について考える。

$$\begin{aligned}
W &= \left| \widetilde{p}_3 (E_1 + E_2 - k_0) - \widetilde{E}_3 \hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) \right| \\
&= \left\{ \widetilde{p}_3^2 (E_1 + E_2 - k_0) - \widetilde{E}_3^2 [\hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k})]^2 \right. \\
&\quad \left. - 2\widetilde{E}_3 \widetilde{p}_3 (E_1 + E_2 - k_0) \hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{ \widetilde{E}_3^2 (E_1 + E_2 - k_0)^2 + \widetilde{p}_3^2 [\hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k})]^2 \right. \\
&\quad \left. - 2\widetilde{E}_3 \widetilde{p}_3 (E_1 + E_2 - k_0) \hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) \right. \\
&\quad \left. + m^2 [\hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k})]^2 - m (E_1 + E_2 - k_0)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{(p_3 \cdot p_4 + m^2)^2 + m^2 [\hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k})]^2 - m (E_1 + E_2 - k_0)^2} \tag{3.11}
\end{aligned}$$

また、 \widetilde{p}_3 については、

$$E_1 + E_2 - k_0 - E_3 - \sqrt{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k} - \mathbf{p}_3)^2 + m^2} = 0 \tag{3.12}$$

となる。これを式変形していく。

$$\begin{aligned}
(E_1 + E_2 - k_0 - E_3)^2 &= (p_1 + p_2 - k)^2 - 2p_3 \cdot (p_1 + p_2 - k) + |p_3|^2 + m^2 \\
(E_1 + E_2 - k_0)^2 - 2E_3(E_1 + E_2 - k_0) + E_3^2 &= (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k})^2 - 2\mathbf{p}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) + \mathbf{E}_3^2 \\
2\sqrt{|p_3|^2 + m^2}(E_1 + E_2 - k_0) & \\
= (E_1 + E_2 - k_0)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k})^2 + 2\mathbf{p}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) & \tag{3.13}
\end{aligned}$$

両辺二乗すると

$$\begin{aligned}
&4 \left\{ (E_1 + E_2 - k_0)^2 - [\hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k})]^2 \right\} |p_3|^2 \\
&- 4 \left\{ (E_1 + E_2 - k_0)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k})^2 \right\} \hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) |p_3| \\
&+ 4m^2 (E_1 + E_2 - k_0)^2 - \left\{ (E_1 + E_2 - k_0)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k})^2 \right\}^2 = 0 \tag{3.14}
\end{aligned}$$

を得る。よって、

$$\tilde{p}_3 = \frac{\left\{ (E_1 + E_2 - k_0)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k})^2 \right\} \hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) \pm \sqrt{A}}{2 \left\{ (E_1 + E_2 - k_0)^2 - [\hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k})]^2 \right\}} \tag{3.15}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
&(E_1 + E_2 - k_0)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k})^2 \\
&= 2m^2 + 2(E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) - 2(E_1 k_0 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}) - 2(E_2 k_0 - \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k}) \\
&= 2(p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot k - p_2 \cdot k + m^2) \tag{3.16}
\end{aligned}$$

より、 \tilde{p}_3 は

$$\tilde{p}_3 = \frac{2(p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot k - p_2 \cdot k + m^2) \hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) \pm \sqrt{A}}{2 \left\{ (E_1 + E_2 - k_0)^2 - [\hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k})]^2 \right\}} \tag{3.17}$$

となる。また、 A については、

$$\begin{aligned}
A &= [\hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k})]^2 \\
&- \left(\left\{ (E_1 + E_2 - k_0)^2 - [\hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k})]^2 \right\} \right. \\
&\quad \left. \times \left[4m^2 (E_1 + E_2 - k_0)^2 - \left\{ (E_1 + E_2 - k_0)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k})^2 \right\}^2 \right] \right) \\
&= \left[2(p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot k - p_2 \cdot k + m^2) \hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) \right]^2 \\
&- \left(\left\{ (E_1 + E_2 - k_0)^2 - [\hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k})]^2 \right\} \right. \\
&\quad \left. \times \left[4m^2 (E_1 + E_2 - k_0)^2 - 4(p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot k - p_2 \cdot k + m^2)^2 \right] \right) \\
&= 4(E_1 + E_2 - k_0)^2 \left\{ (p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot k - p_2 \cdot k + m^2)^2 \right. \\
&\quad \left. + m^2 [\hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k})]^2 - m^2 (E_1 + E_2 - k_0)^2 \right\} \tag{3.18}
\end{aligned}$$

を得る。以上より、

$$p_3 = \frac{(p_3 \cdot p_4 + m^2) \hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) \pm (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 - \mathbf{k}_0) \mathbf{W}}{(E_1 + E_2 - k_0)^2 - [\hat{\mathbf{p}}_3 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k})]^2} \tag{3.19}$$

とする事が出来る。

次に $|Tr|^2$ について考える。現在、 $|Tr|^2$ の変数は

$$p_1 \cdot p_2, p_1 \cdot p_3, p_1 \cdot p_4, p_2 \cdot p_3, p_2 \cdot p_4, p_3 \cdot p_4, p_1 \cdot k, p_2 \cdot k, p_3 \cdot k, p_4 \cdot k \quad (3.20)$$

の 10 個となっている。これをエネルギー・運動量保存則を用いて減らしていく。例えば、

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 + k \quad (3.21)$$

より、両辺二乗して

$$p_1 \cdot p_2 = p_3 \cdot p_4 + p_1 \cdot k + p_2 \cdot k \quad (3.22)$$

を得る。同様にして、

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 &= p_3 \cdot p_4 + p_3 \cdot k + p_4 \cdot k \\ p_1 \cdot p_3 &= p_2 \cdot p_4 + p_2 \cdot k + p_4 \cdot k \\ p_1 \cdot p_4 &= p_2 \cdot p_3 + p_2 \cdot k + p_3 \cdot k \\ p_2 \cdot p_3 &= p_1 \cdot p_4 + p_1 \cdot k + p_4 \cdot k \\ p_2 \cdot p_4 &= p_1 \cdot p_3 + p_1 \cdot k + p_3 \cdot k \\ p_3 \cdot p_4 &= p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot k + p_2 \cdot k \\ p_1 \cdot k &= p_2 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_4 - p_3 \cdot p_4 - m^2 \\ p_2 \cdot k &= p_1 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_4 - p_3 \cdot p_4 - m^2 \\ p_3 \cdot k &= p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot p_4 - p_2 \cdot p_4 - m^2 \\ p_4 \cdot k &= p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot p_3 - p_2 \cdot p_3 - m^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

とする事が出来る。これを解く事で、

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_4 &= p_3 \cdot p_4 + p_2 \cdot k - p_1 \cdot p_3 + m^2 \\ p_2 \cdot p_3 &= p_3 \cdot p_4 + p_3 \cdot k - p_1 \cdot p_3 + m^2 \\ p_2 \cdot p_4 &= p_1 \cdot p_3 + p_1 \cdot k - p_3 \cdot k \\ p_4 \cdot k &= p_1 \cdot p_2 - p_3 \cdot p_4 - p_3 \cdot k \\ p_3 \cdot p_4 &= p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot k - p_2 \cdot k \end{aligned} \quad (3.24)$$

を得る。これにより $|Tr|^2$ の変数を減らす事が出来る。また、立体角、それぞれのベクトルは以下のように表す事が出来る。

$$d\Omega_{p_3} = \sin \theta_{p_3} d\theta d\phi \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} p_1 \cdot k &= |p_1| k_0 \cos \theta_k \\ p_1 \cdot p_3 &= |p_1| |p_3| \cos \theta_{p_3} \\ p_3 \cdot k &= |p_3| k_0 \{ \cos \theta_k \cos \theta_{p_3} + \sin \theta_k \sin \theta_{p_3} \cos(\phi_k - \phi_{p_3}) \} \end{aligned} \quad (3.26)$$

以上より、微分断面積を計算した。尚、今回は重心系を考えた為、

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 + k = 0 \quad (3.27)$$

を用いる事ができる。よって、

$$2E_1 = 2E_2 = E_3 + E_4 + k_0 \quad (3.28)$$

とする事が出来る。これにより W, p_3 について

$$W = \sqrt{(p_3 \cdot p_4 + m^2)^2 + m^2 (\hat{p}_3 \cdot k)^2 - m (2E_1 - k_0)^2}$$

$$p_3 = \frac{-(p_3 \cdot p_4 + m^2) \hat{p}_3 \cdot k \pm (2E_1 - k_0) W}{(2E_1 - k_0)^2 - (\hat{p}_3 \cdot k)^2} \quad (3.29)$$

を得る。また、今回 $E'_1 = E_1 - m$, $\theta_k : p_1$ と k の角度を導入した。この計算結果と Haug(1975a) によって与えられた散乱断面積の解析式を次に示すグラフにより比較した。その結果、我々の計算と Haug(1975a) による散乱断面積の一致が確認できた。よって、今後は Haug の散乱断面積を用いて議論を行う。

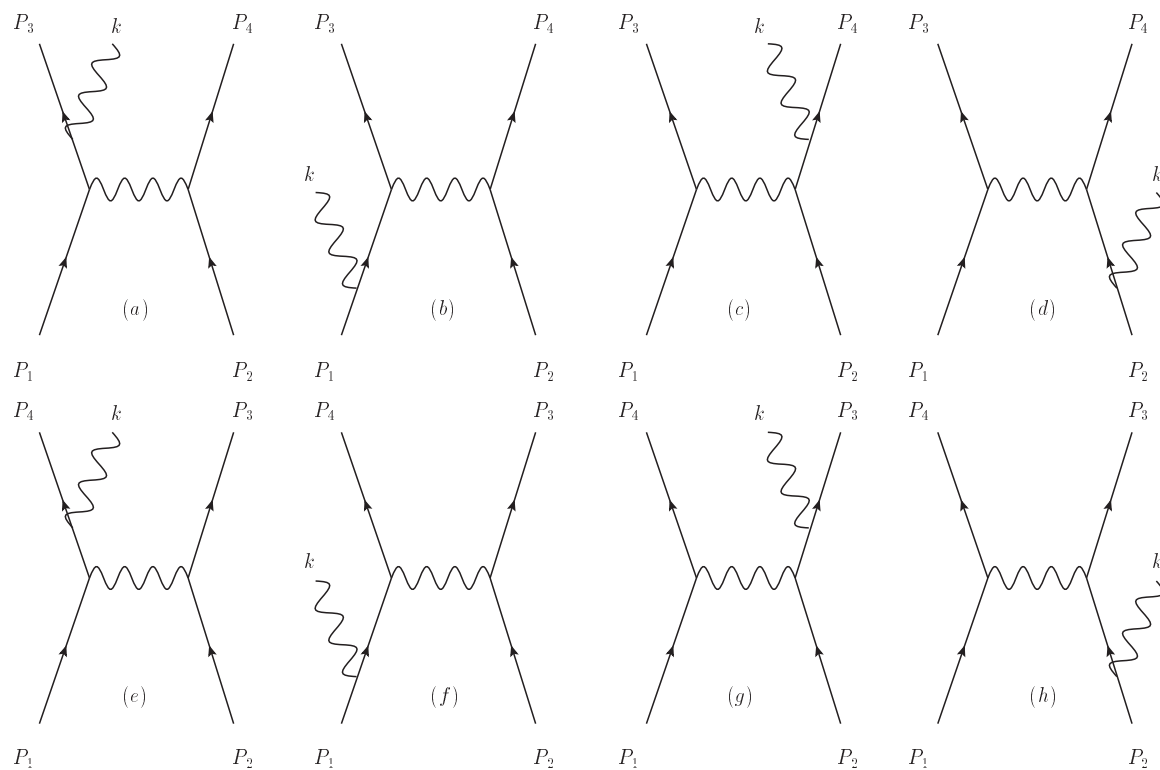


図 3.1: 電子 - 電子熱制動放射ファイマンダイアグラム

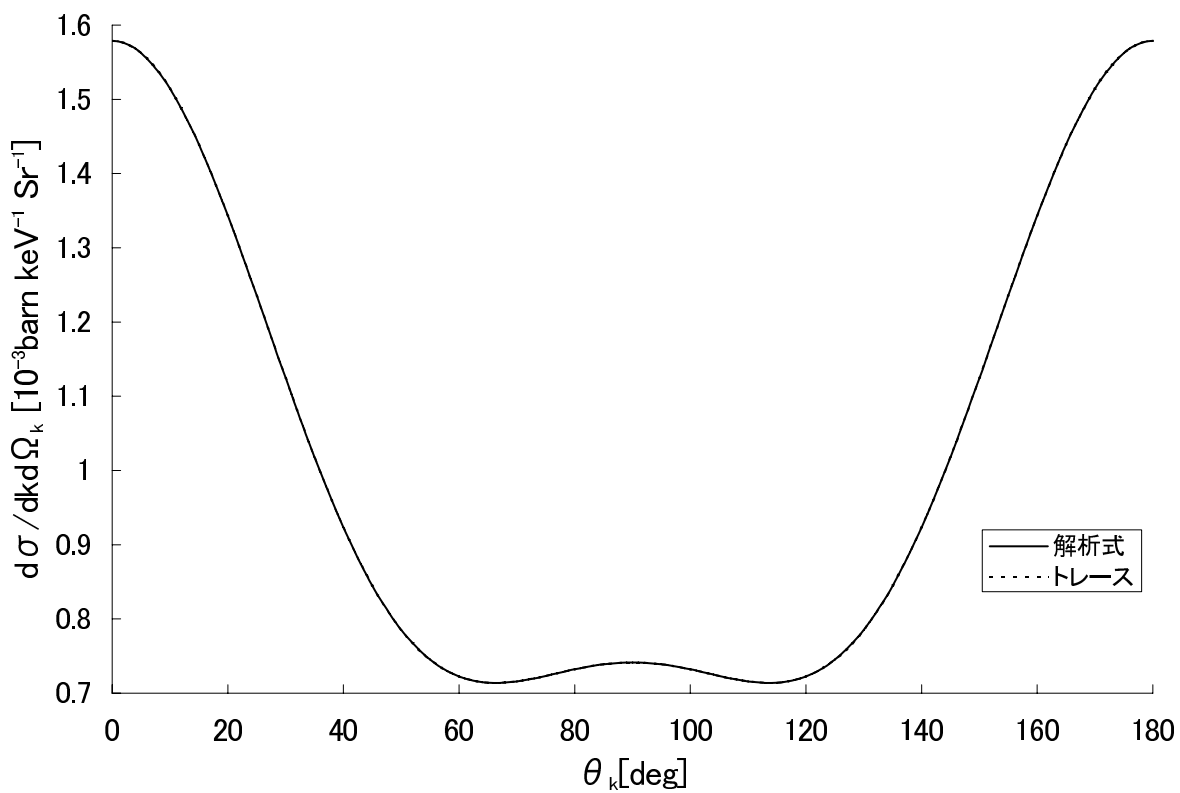


図 3.2: $E'_1=10\text{keV}$ $k_0=1\text{keV}$

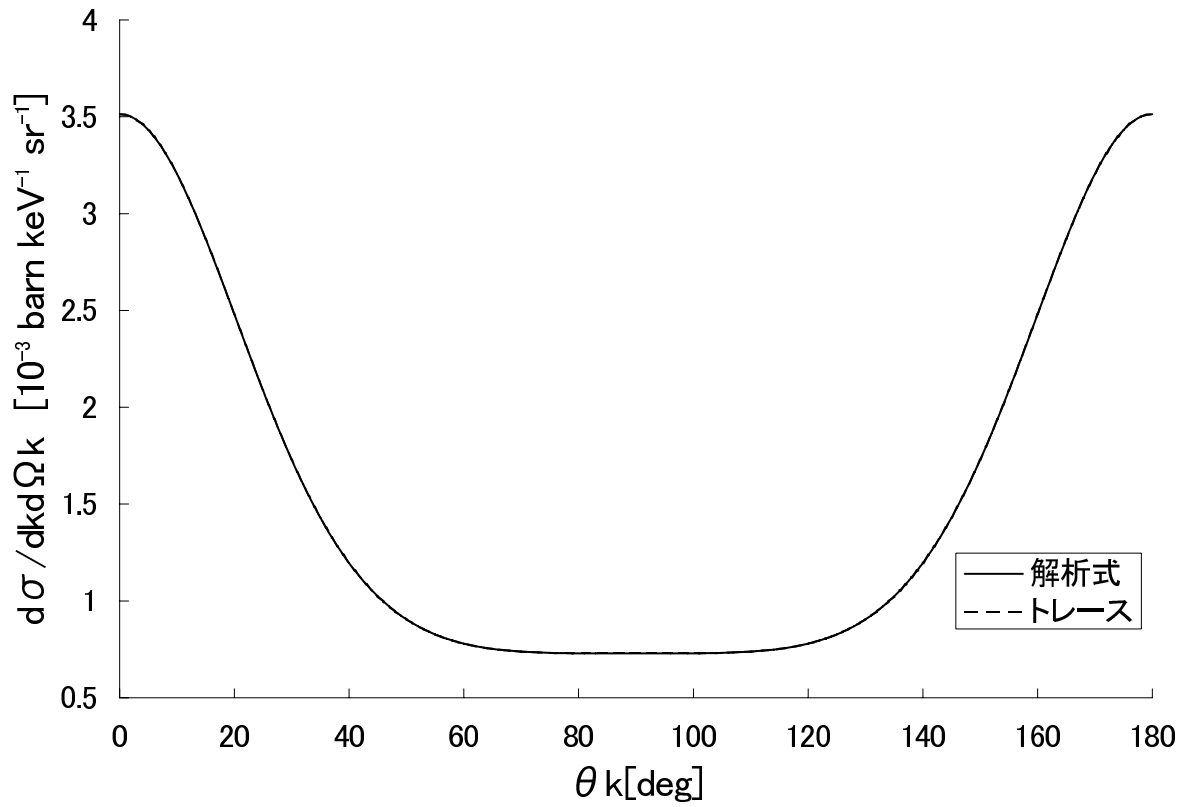


図 3.3: $E'_1=10\text{keV}$ $k_0=1\text{keV}$

3.2 数値計算

3.2.1 電子 - 電子熱制動放射における PPR

電子 - 電子熱制動放射の PPR は Stepney & Guilbert(1983) によって与えられている。

$$P_{ee}(k, \tau) = \frac{3\alpha_f n_e^2 \sigma_T c}{16\pi} \frac{k \exp(-\frac{k}{\tau})}{\tau [2 \exp(\frac{1}{\tau}) K_2(\frac{1}{\tau})]^2} \int_0^\infty ds \exp(-s) \int_{-T}^T dt \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu$$

$$\times \int_0^{\theta_{max}} \frac{\sin \theta d\theta}{[2(\mu + 1 - x)]^{\frac{1}{2}}} \int_0^\pi d\phi \Sigma \quad (3.30)$$

$$\Sigma = \frac{\sqrt{\rho^2 - 4}}{\pi} \int Ad\Omega_P \quad (3.31)$$

$$T = \epsilon - 2, (s_1 \leq s)$$

$$T = \left[\frac{\mu_k - 1}{\mu_k + 1} \{ \epsilon^2 - 2(\mu_k + 1) \} \right]^{\frac{1}{2}}, (s_1 \geq s)$$

$$\begin{aligned} \mu_1 = \mu_{min}, \mu_2 = \mu_{max}, & \quad [k \leq F(\mu_{min}, \epsilon)] \\ \mu_1 = \mu_k, \mu_2 = \mu_{max}, & \quad [F(\mu_{min}, \epsilon) \leq k \leq F(\mu_{max}, \epsilon)] \\ \mu_1 = \mu_k, \mu_2 = 1 + k \left[(\epsilon - k) + \left\{ (\epsilon - k)^2 - 4 \right\}^{\frac{1}{2}} \right], & \quad [k \geq F(\mu_{max}, \epsilon)] \end{aligned}$$

$$\cos \theta_{max} = \text{Max} \left[\frac{\epsilon - \frac{(\mu-1)}{k}}{\{ \epsilon^2 - 2(\mu + 1) \}^{\frac{1}{2}}} - 1 \right]$$

$$\epsilon \equiv \epsilon_1 + \epsilon_2$$

$$\mu_k \equiv 1 + k \left[(\epsilon - k) - \left\{ (\epsilon - k)^2 - 4 \right\}^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$s_1 = \frac{k}{\tau} \left\{ \frac{k - [k^2 + 4k]^{\frac{1}{2}} + 3}{2[k^2 + 4k]^{\frac{1}{2}} + 3} \right\}$$

$$\mu_{min} = \epsilon_1 \epsilon_2 - P_1 P_2$$

$$\mu_{max} = \epsilon_1 \epsilon_2 + P_1 P_2$$

$$F(\mu, \epsilon) = \frac{\mu - 1}{\epsilon - [\epsilon^2 - 2(\mu + 1)]^{\frac{1}{2}}}$$

この結果より PPR を求める為には、5 重積分を行う必要がある。積分には Gauss 積分法を採用した。これはルジャンドル関数のゼロ点を用いた積分法で、高速・高精度計算を行う事が出来る。また、演算コンピュータは最新のものをを用いた。しかし、それらを用いても、1つの温度について $10^{-4} \leq x \leq 10$ の範囲で計算結果を得る為に、平均で2日程度の時間を要した。この計算をプラズマ温度 $1\text{keV} \leq k_B T \leq 7\text{MeV}$ の範囲で行った。また、プラズマ温度を上げると計算結果の誤差が目立ち、グラフが波を打つようになった。その為、積分精度を上げる必要性が生じ、積分の分割点を増やした為、高温領域ではより多くの時間を要した。

また、この式はクーロン相互作用を考慮していない形になっている。その為、今回の研究では Elwert Factor

$$f_{ee}(a_i, a_f) = \frac{a_f}{a_i} \frac{1 - \exp(-2\pi a_i)}{1 - \exp(-2\pi a_f)} \quad (3.32)$$

を乗じ、クーロン相互作用を考慮して積分を行った。具体的には、

$$P_{ee}(k, \tau) = \frac{3\alpha_f}{16\pi} n_e^2 \sigma_T c \frac{k \exp(-\frac{k}{\tau})}{\tau [2 \exp(\frac{1}{\tau}) K_2(\frac{1}{\tau})]^2} \int_0^\infty ds \exp(-s) \int_{-T}^T dt \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \\ \times \int_0^{\theta_{max}} \frac{\sin \theta d\theta}{[2(\mu + 1 - x)]^{\frac{1}{2}}} \int_0^\pi d\phi f_{ee} \Sigma \quad (3.33)$$

$$\Sigma = \frac{\sqrt{\rho^2 - 4}}{\pi} \int Ad\Omega_P \quad (3.34)$$

$$f_{ee} = \frac{\beta_{12} e^{2\pi\alpha/\beta_{12}} - 1}{\beta'_{12} e^{2\pi\alpha/\beta'_{12}} - 1}, \quad (3.35)$$

$$\beta_{12} = \frac{\omega\sqrt{\omega^2 - 4}}{\omega^2 - 2}, \quad (3.36)$$

$$\beta'_{12} = \frac{\rho\sqrt{\rho^2 - 4}}{\rho^2 - 2}. \quad (3.37)$$

である。但し、 $k = h\nu/m_e c^2$ は電子静止質量で規格化された光子エネルギー、 $\tau = k_B T/m_e c^2$ は電子静止質量で規格化されたプラズマ熱エネルギー、 $K_2(1/\tau)$ は第二種変形ベッセル関数、 α は微細構造因子、 σ_T はトムソン散乱断面積を表す。 $\omega^2 = (p_1 + p_2)^2$ 、 $\rho^2 = (p'_1 + p'_2)^2$ 、 $\mu = p_1 \cdot p_2$ と表される。また、 p_1 (p'_1)、 p_2 (p'_2) は始状態 (終状態) の電子についての電子静止質量で規格化された四次元モーメントを表す。ここで、 $1/\pi \int Ad\Omega_{p'}$ は散乱断面積を積分したものであり、Haug (1975a) によって与えられている。

また、PPR は以下のように書き換えることが出来る。

$$P_{ee}(k, \tau) = n_e^2 \sigma_T c \alpha \frac{e^{-x}}{x} \frac{1}{\sqrt{\tau}} G(x, \tau), \quad (3.38)$$

但し、 $x = k/\tau$ であり、 $G(x, \tau)$ は

$$G(x, \tau) = \frac{3}{16\pi^2} \frac{x^2 \sqrt{\tau}}{[2 \exp(1/\tau) K_2(1/\tau)]^2} \int_0^\infty ds \exp(-s) \int_{-T_1}^{T_1} dt \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \\ \times \int_0^{\theta_{max}} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{2(\mu + 1 - x)}} \int_0^\pi d\phi f_{ee} \Sigma, \quad (3.39)$$

$$\Sigma = \frac{\sqrt{\rho^2 - 4}}{\pi} \int Ad\Omega_{p'_1}, \quad (3.40)$$

今回の研究では Fitting 式の精度を上げる為に、Stepney & Guilbert (1983) の論文と Fitting 関数 $G(x, \tau)$ の定義を変え、 $\sqrt{\tau}$ をくくり出した。

$$G_{SG}(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} G(x, \tau), \quad (3.41)$$

SG は Stepney & Guilbert を表す。

更に Elwert Factor は、

$$F_{CC}(x, \tau) = \frac{G(x, \tau)}{G(x, \tau; f_{ee} = 1)}, \quad (3.42)$$

より求めた。ここで、 $G(x, \tau)$ は Elwert Factor を乗じた計算結果、 $G(x, \tau; f_{ee} = 1)$ は Elwert factor を除き、 $f_{ee}=1$ とした計算結果を表している。

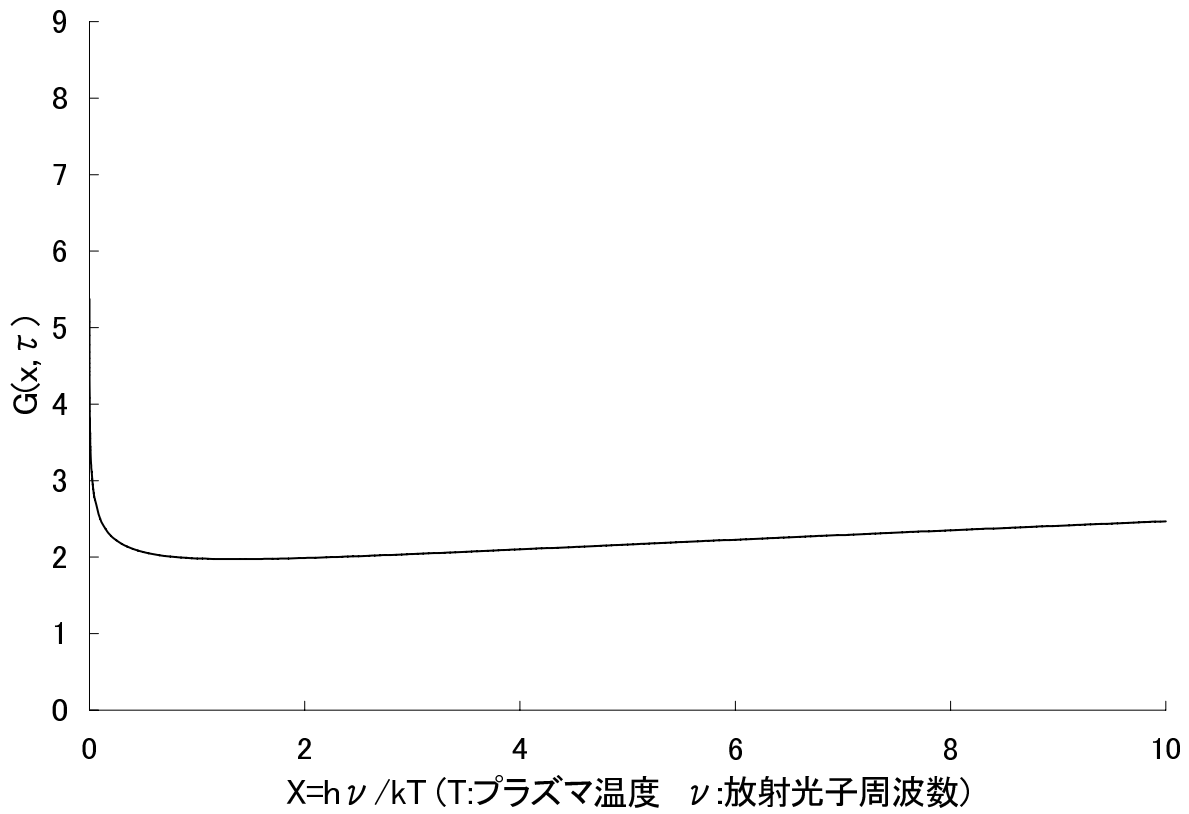


図 3.4: クーロン相互作用を無視した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR $k_B T = 1\text{keV}$

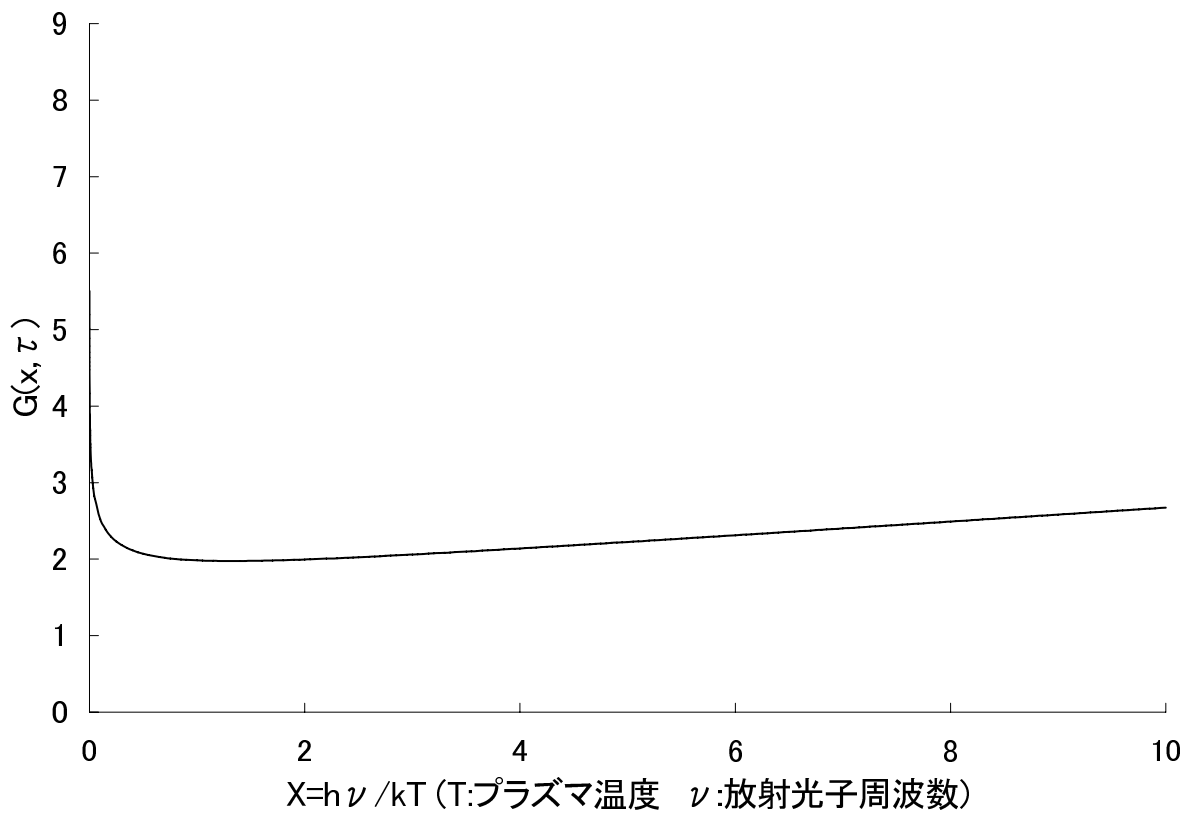


図 3.5: クーロン相互作用を無視した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR $k_B T = 10\text{keV}$

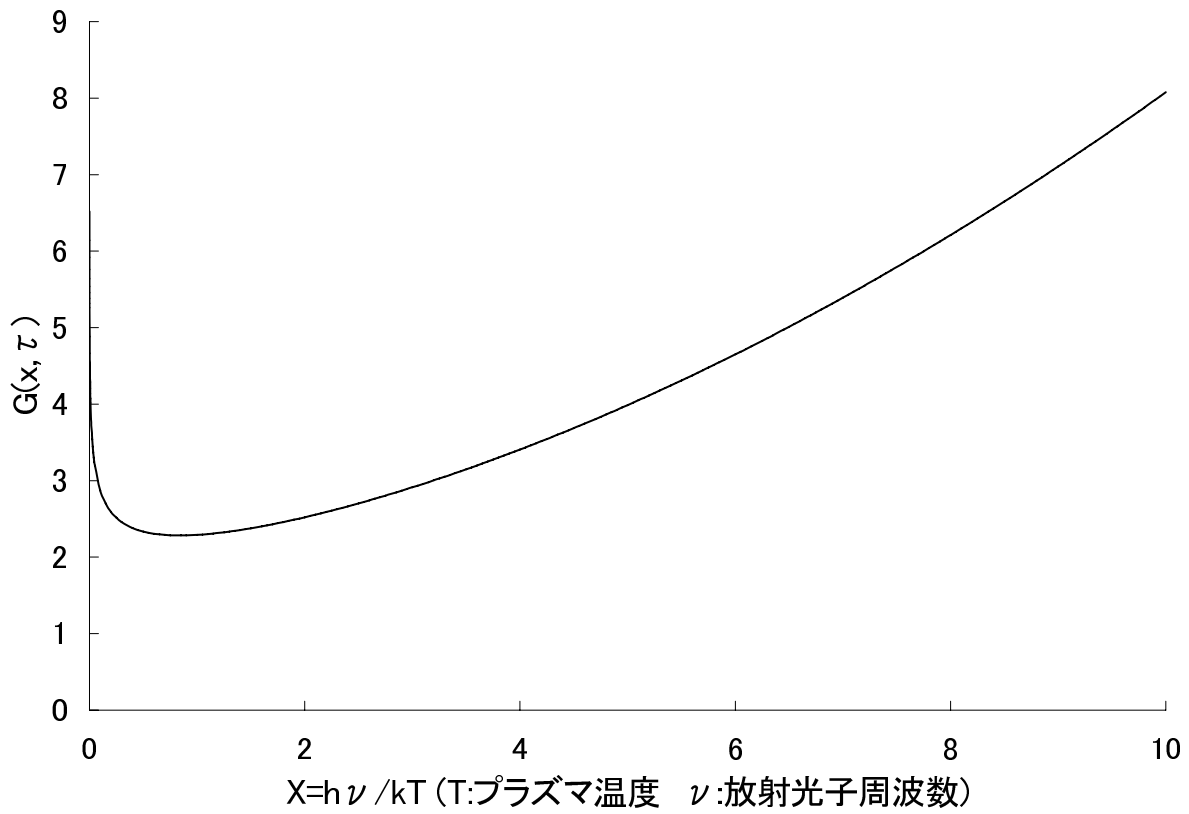


図 3.6: クーロン相互作用を無視した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR $k_B T = 100\text{keV}$

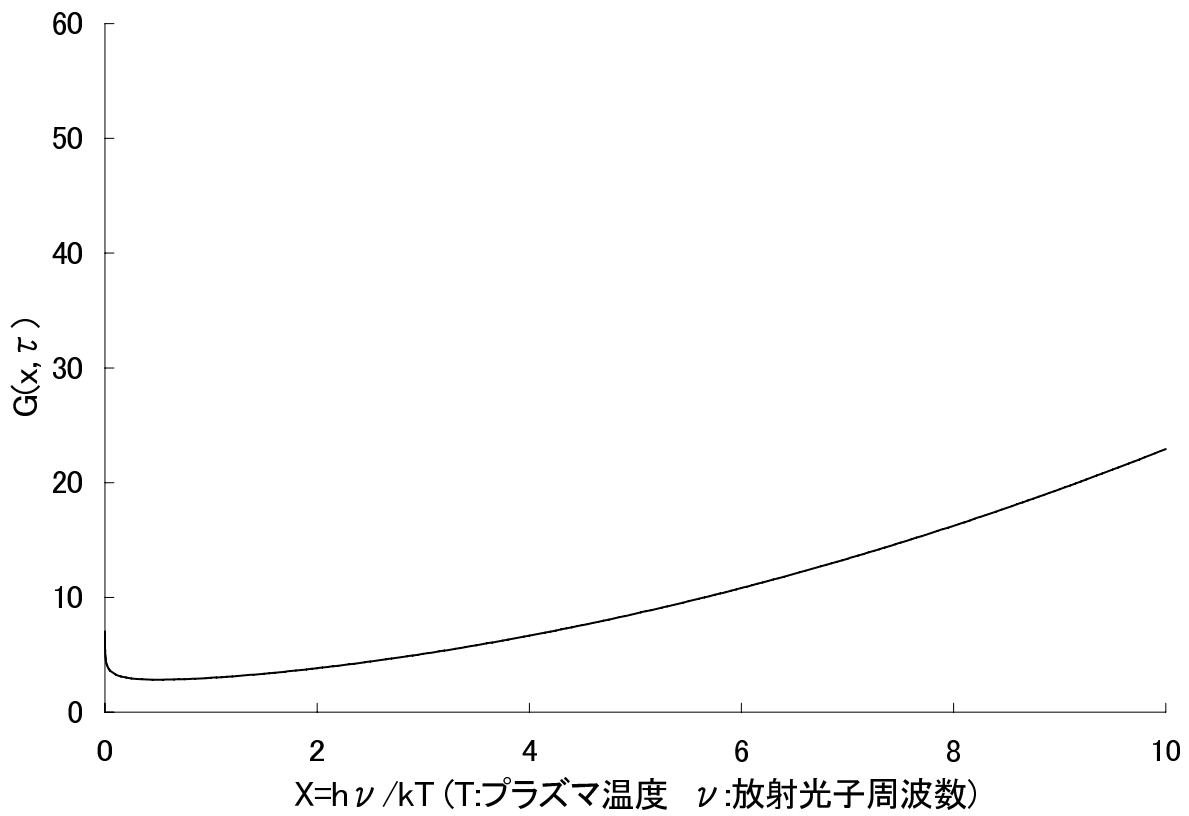


図 3.7: クーロン相互作用を無視した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR $k_B T = 300\text{keV}$

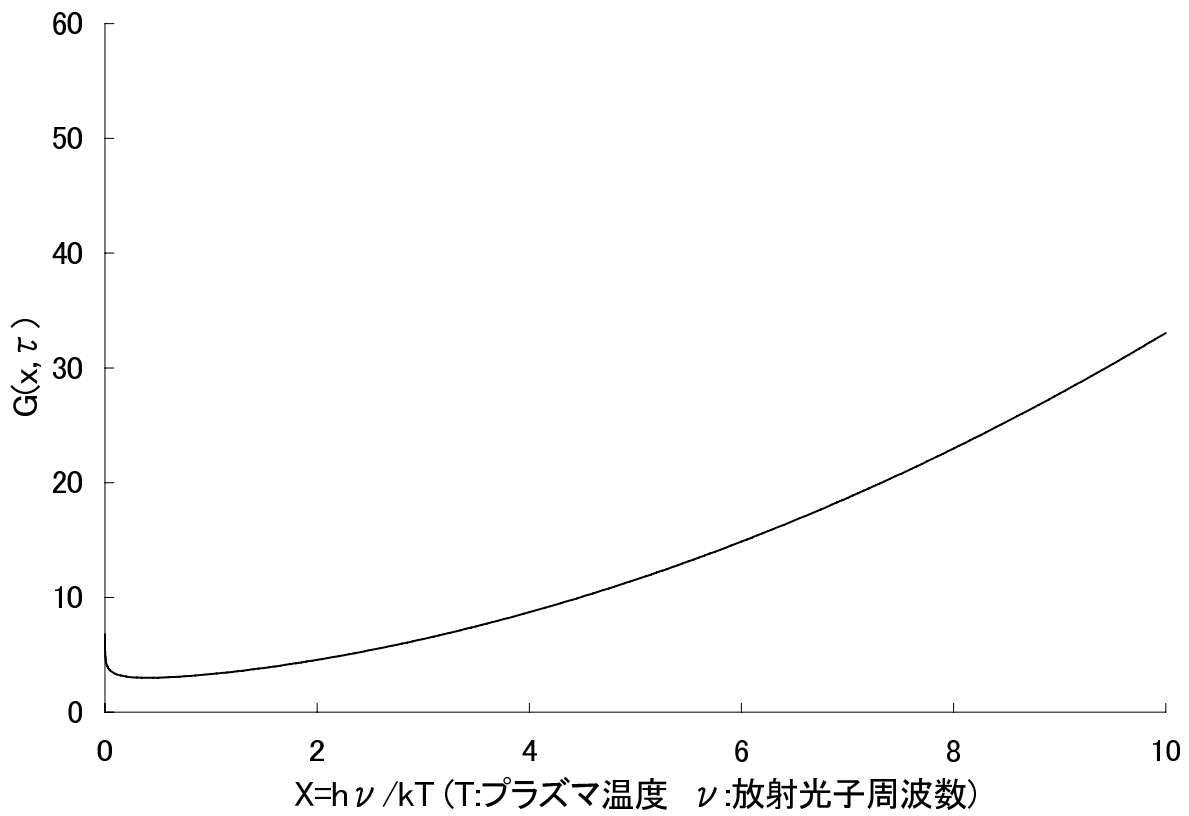


図 3.8: クーロン相互作用を無視した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR $k_B T = 500\text{keV}$

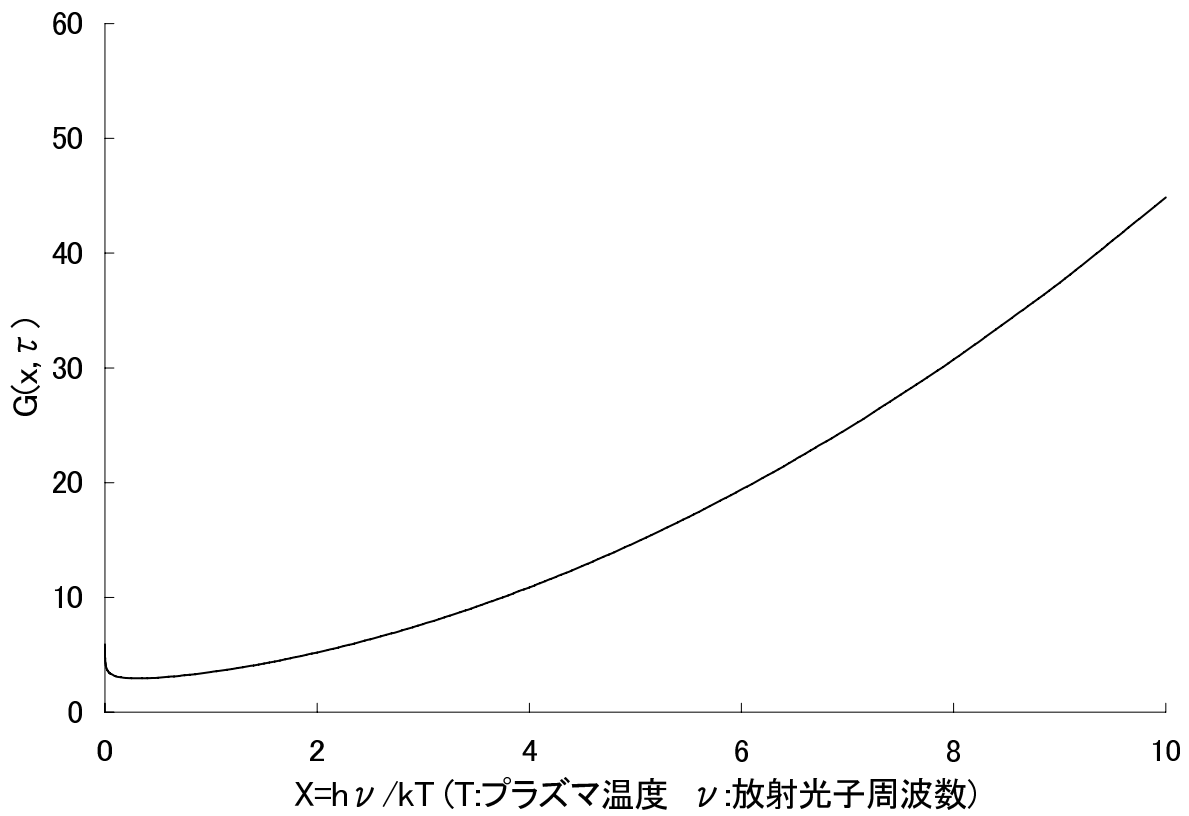


図 3.9: クーロン相互作用を無視した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR $k_B T = 1\text{MeV}$

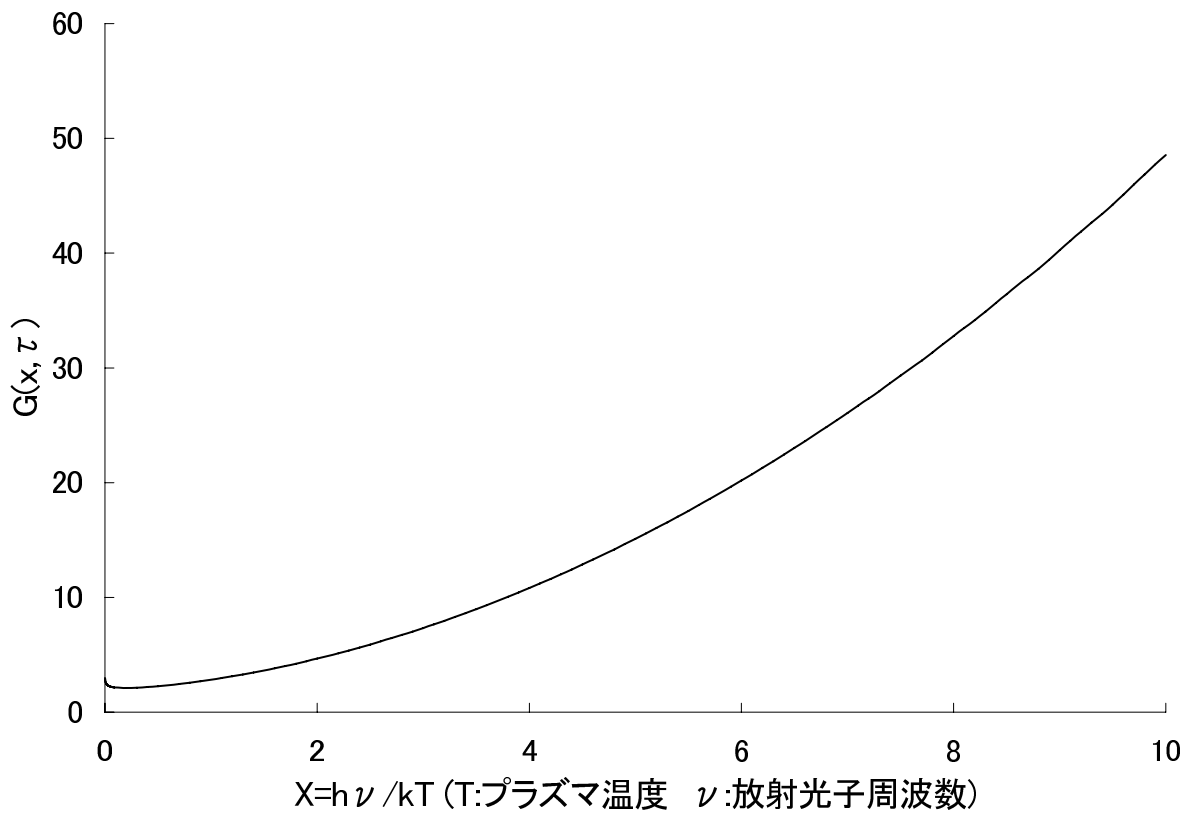


図 3.10: クーロン相互作用を無視した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR $k_B T = 5\text{MeV}$

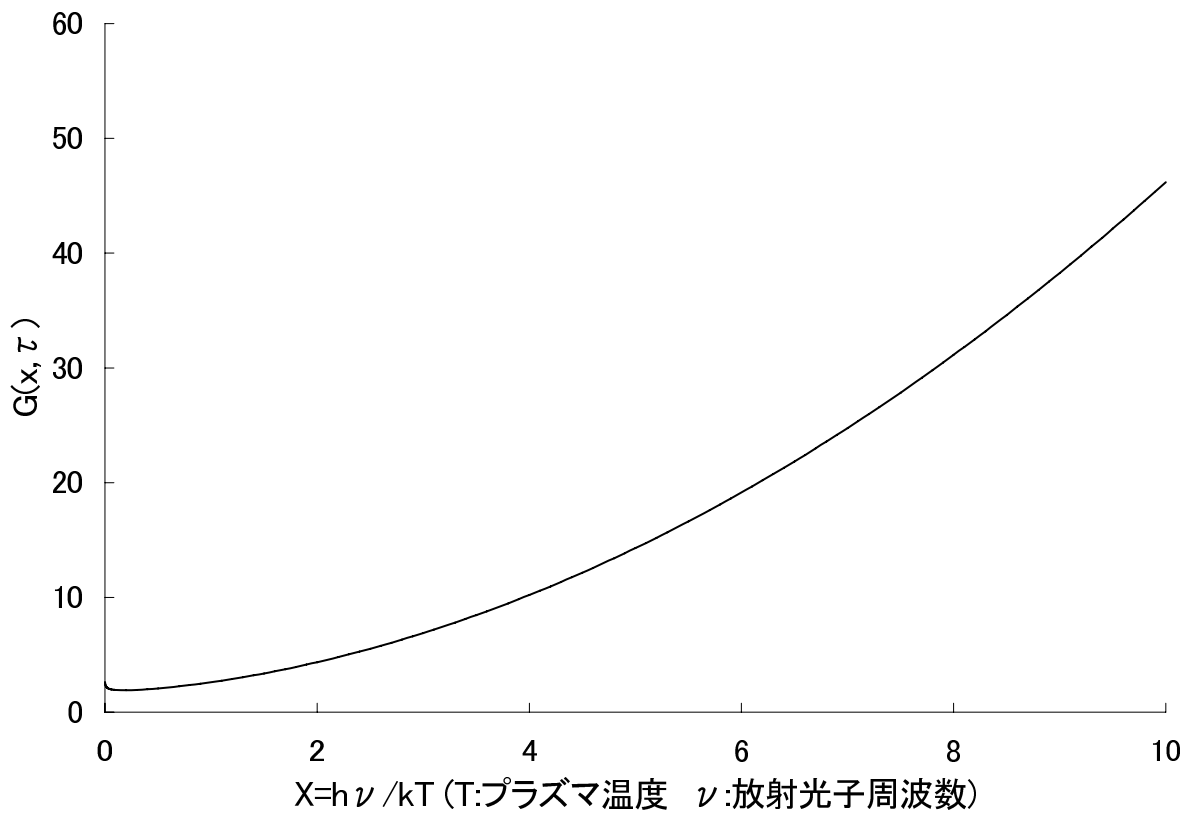


図 3.11: クーロン相互作用を無視した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR $k_B T = 7\text{MeV}$

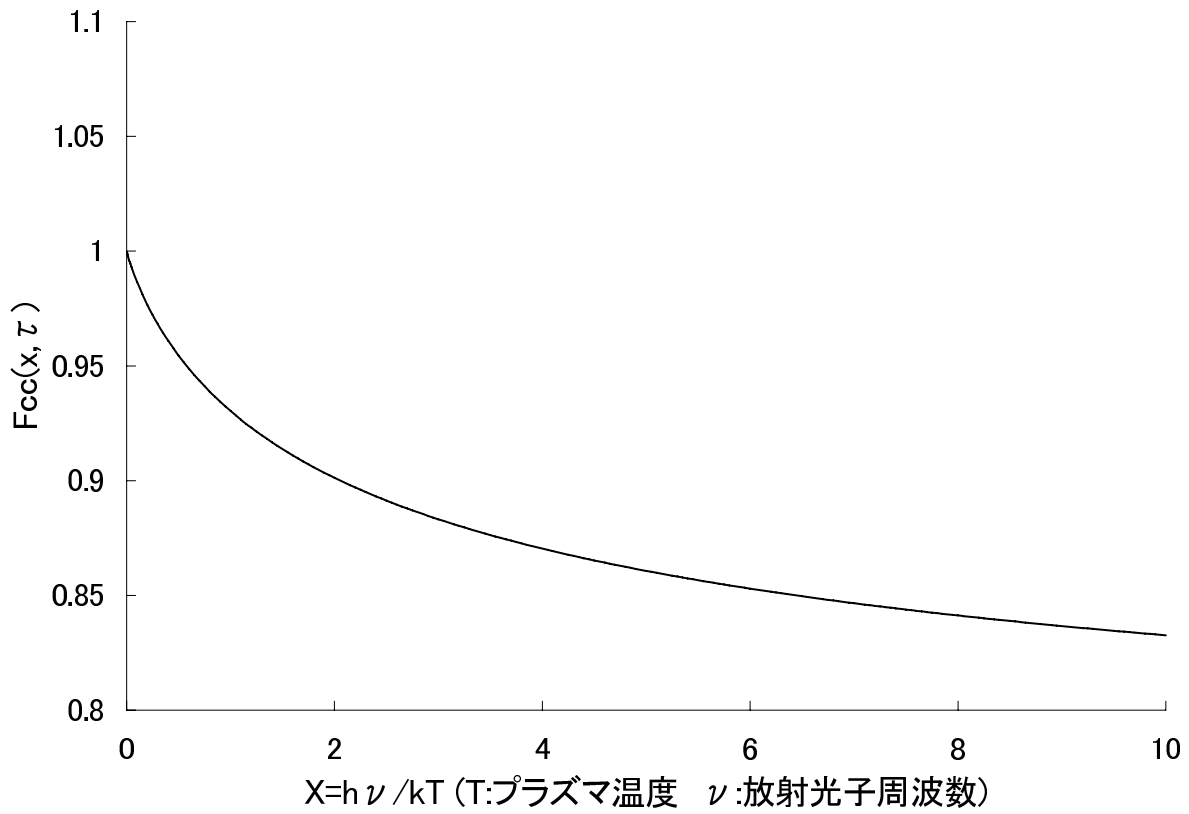


図 3.12: 相対論的電子 - 電子熱制動放射 Elwert Factor $k_B T = 1\text{keV}$

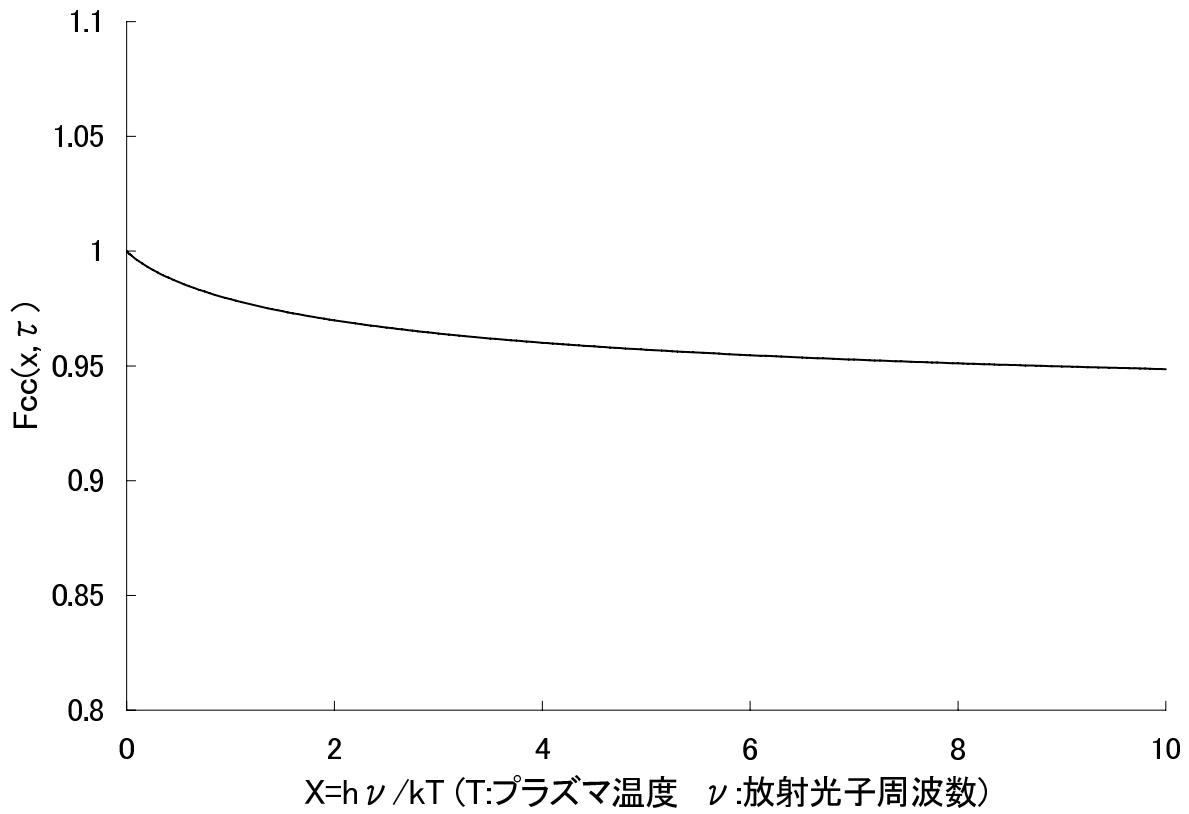


図 3.13: 相対論的電子 - 電子熱制動放射 Elwert Factor $k_B T = 10\text{keV}$

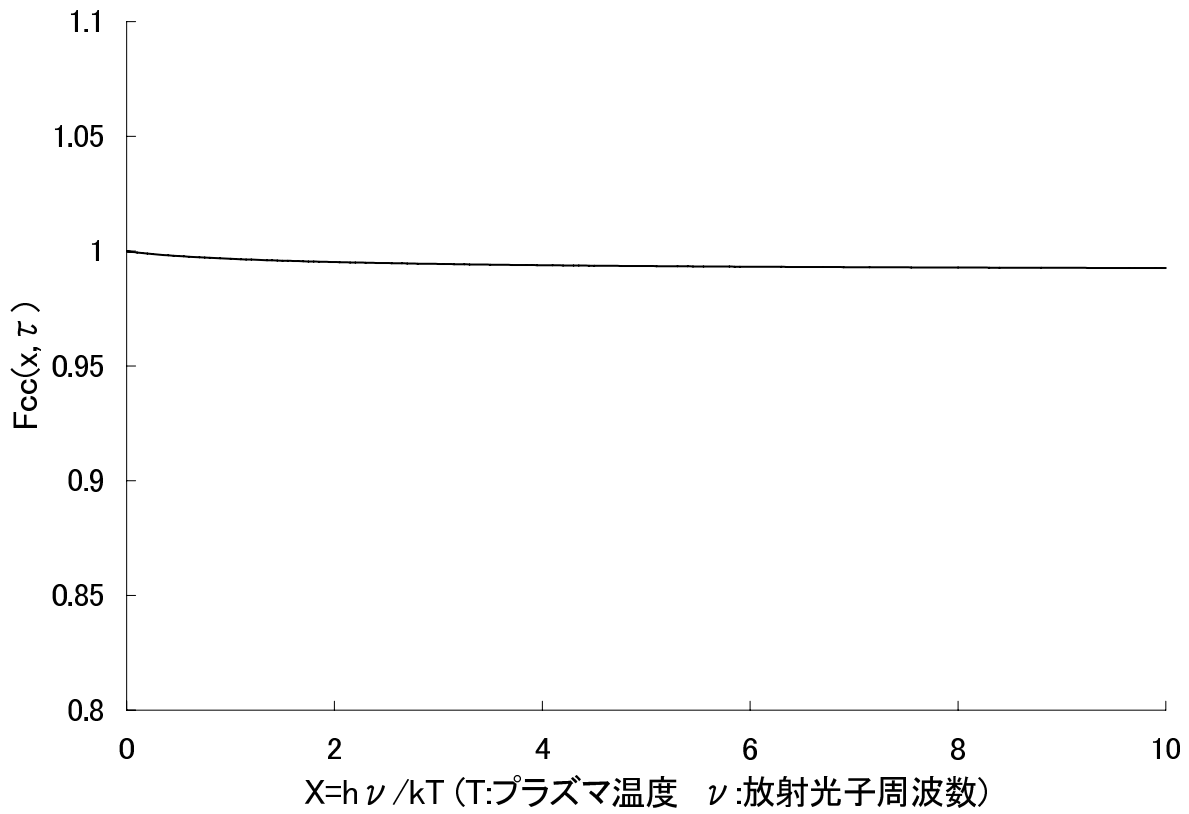


図 3.14: 相対論的電子 - 電子熱制動放射 Elwert Factor $k_B T = 100\text{keV}$

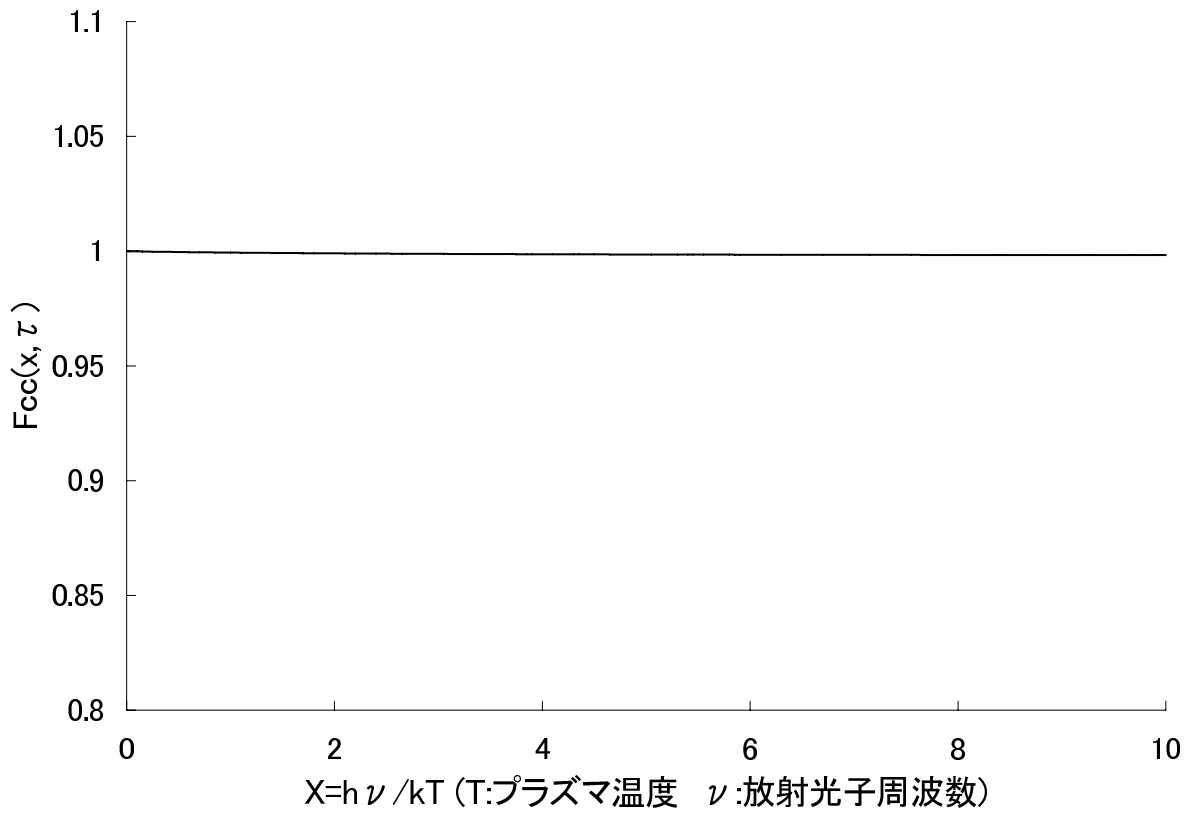


図 3.15: 相対論的電子 - 電子熱制動放射 Elwert Factor $k_B T = 300\text{keV}$

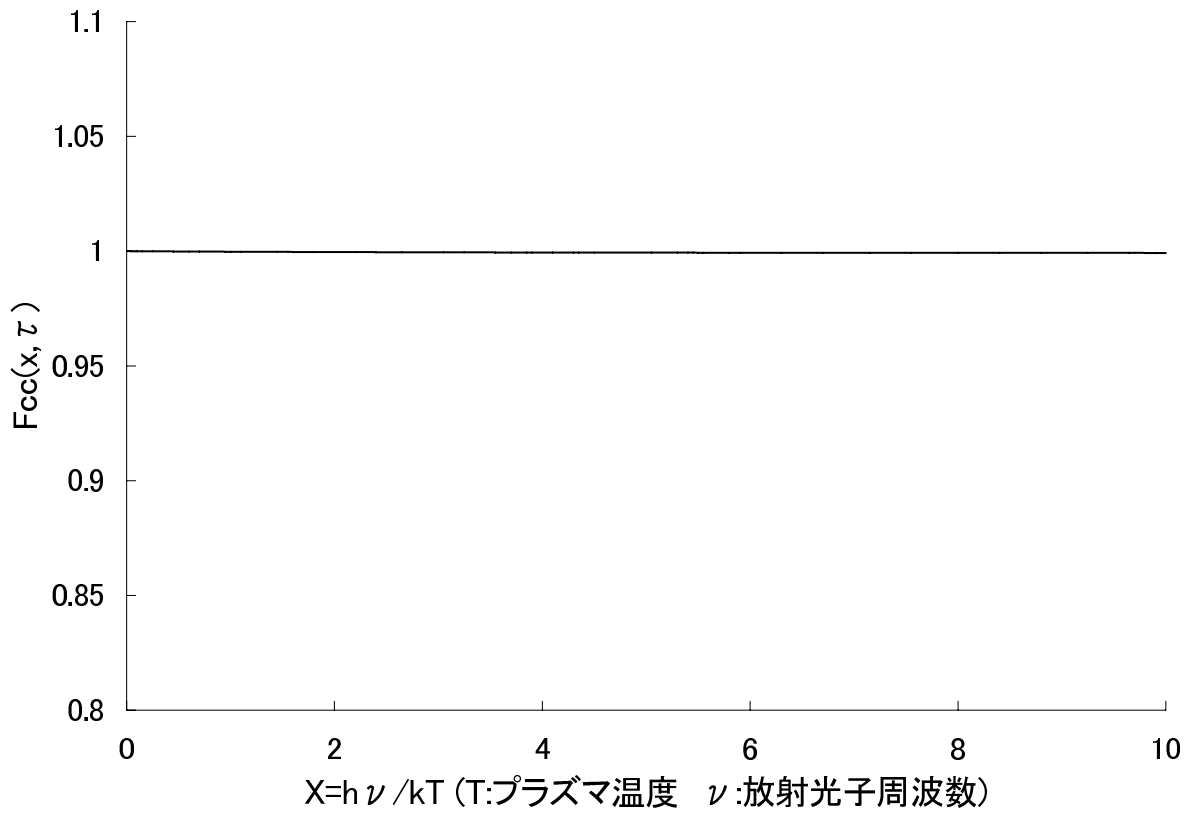


図 3.16: 相対論的電子 - 電子熱制動放射 Elwert Factor $k_B T = 500\text{keV}$

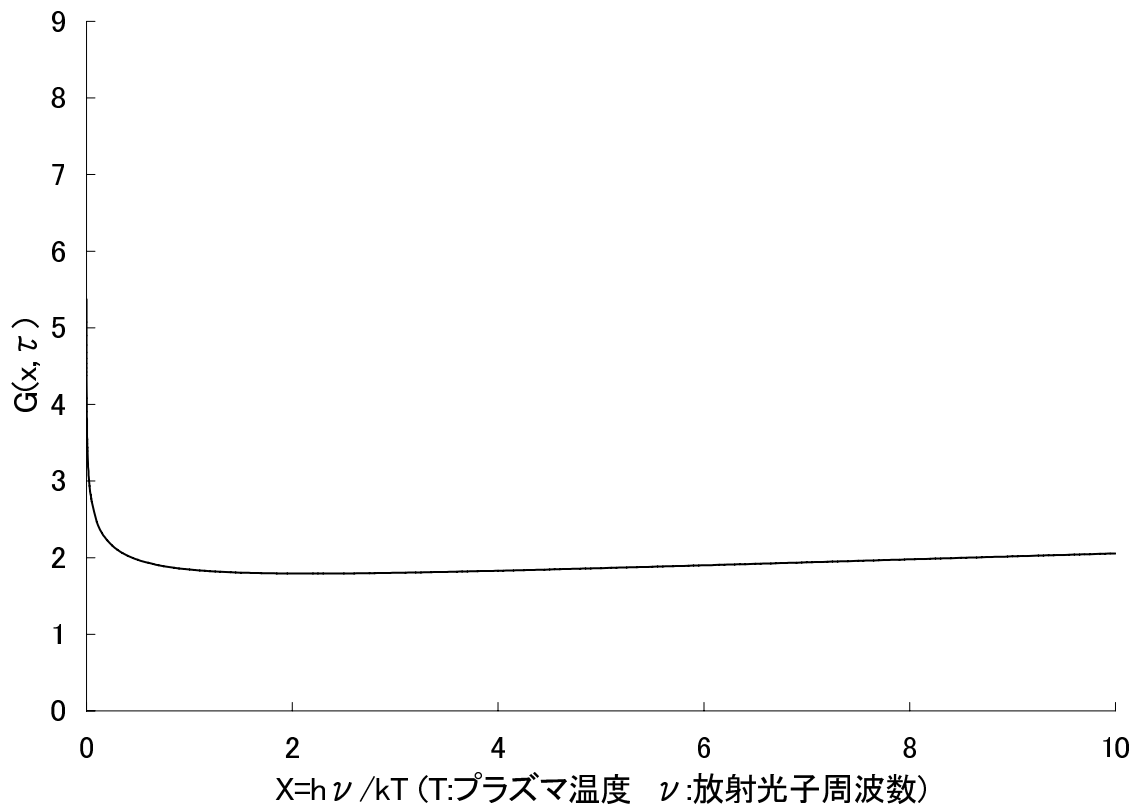


図 3.17: クーロン相互作用を考慮した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR $k_B T = 1\text{keV}$

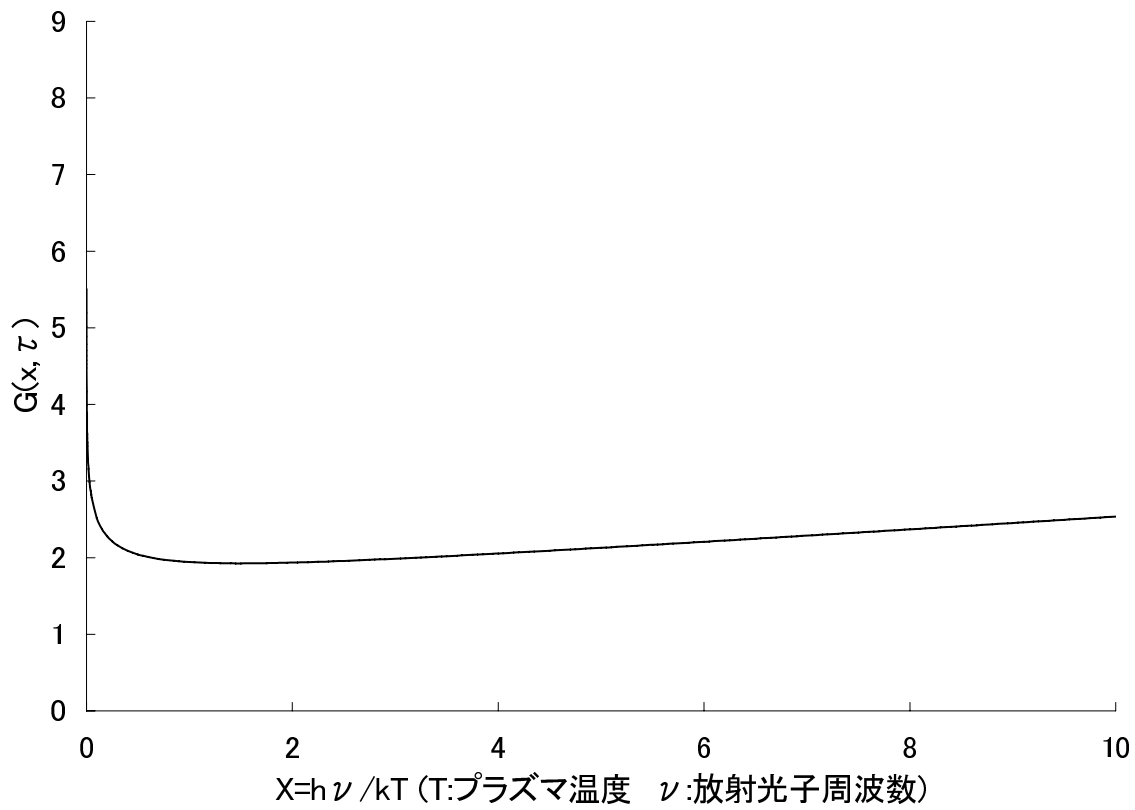


図 3.18: クーロン相互作用を考慮した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR $k_B T = 10\text{keV}$

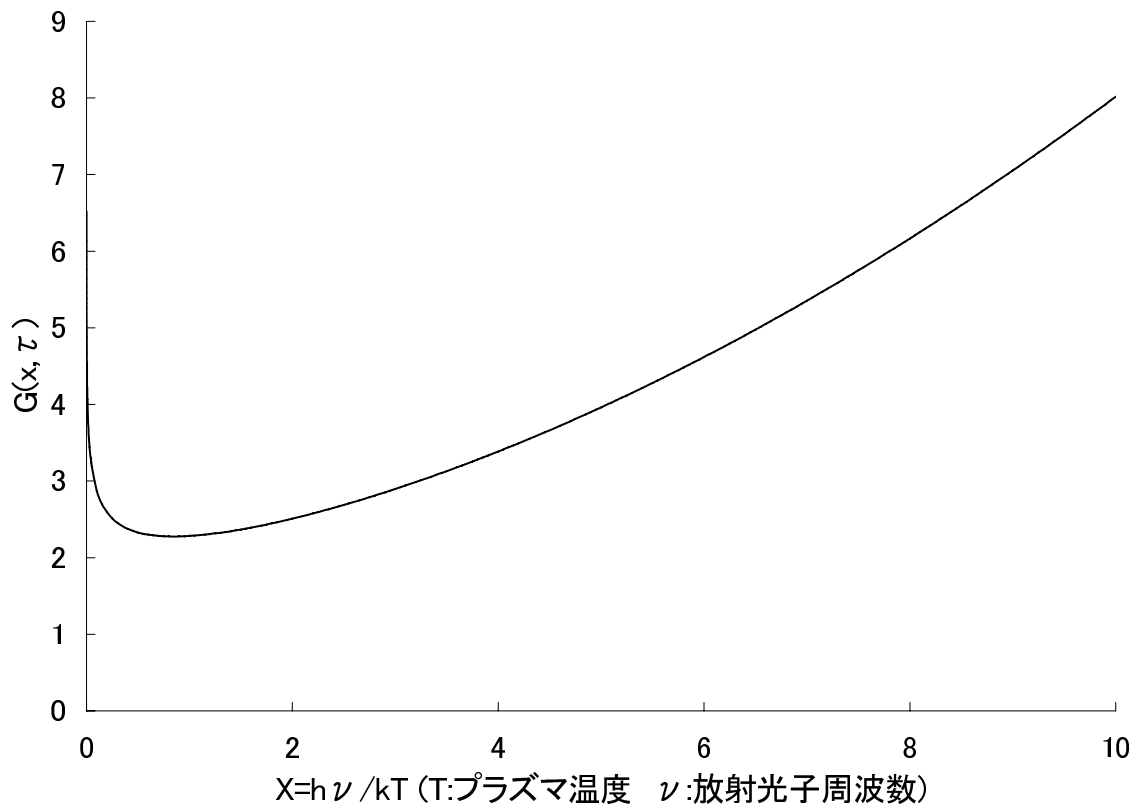


図 3.19: クーロン相互作用を考慮した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR $k_B T = 100\text{keV}$

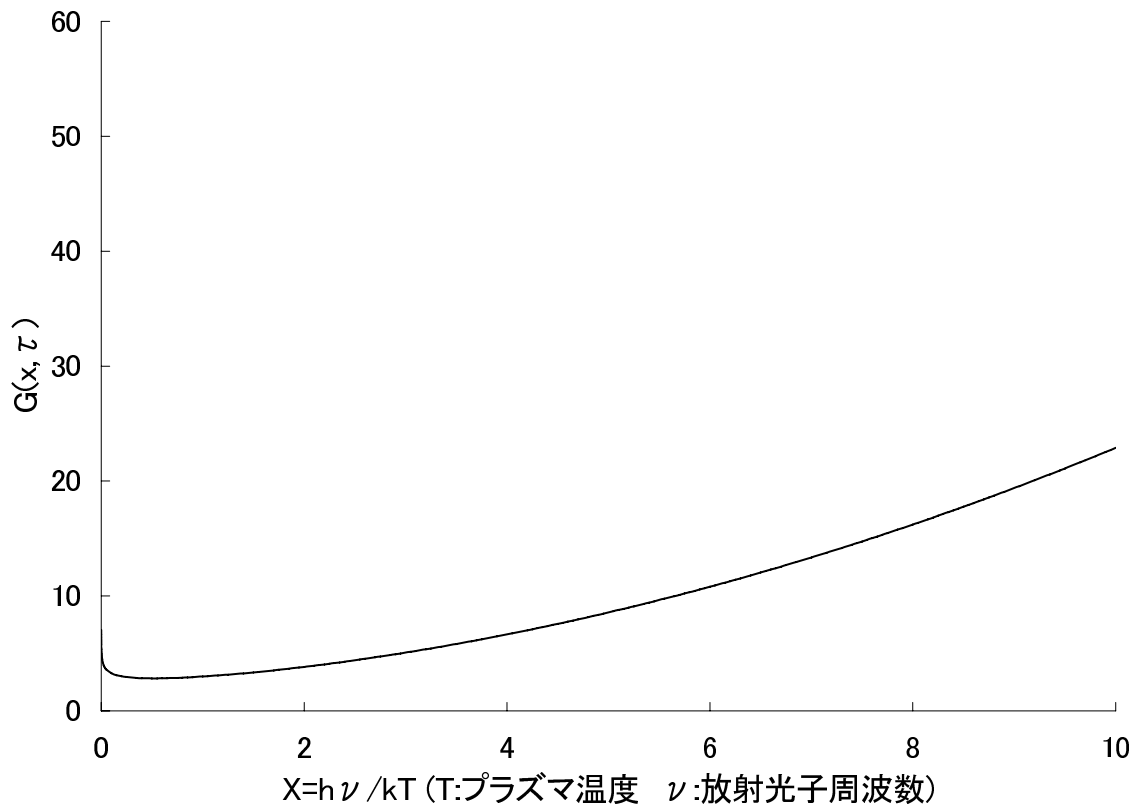


図 3.20: クーロン相互作用を考慮した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR $k_B T = 300\text{keV}$

3.2.2 電子 - 電子熱制動放射における Emissivity

電子 - 電子熱制動放射の Emissivity は同様に Emissivity は以下の式で与えられる。

$$W_{ee}(\tau) = \frac{dE_{ee}}{dV dt} = m_e c^2 \int_0^\infty dk k P_{ee}(k, \tau), \quad (3.43)$$

$$= m_e c^2 n_e^2 \sigma_T c \alpha \tau^{3/2} G(\tau), \quad (3.44)$$

$$G(\tau) = \int_0^\infty dx e^{-x} G(x, \tau). \quad (3.45)$$

今回この式を用いて、6重積分による計算を行った。 $k_B T$ はプラズマ温度、 x はプラズマ温度で規格化された放射光子エネルギーを表す。また、今回はこの結果から得た PPR、Emissivity の応用を考え、Fitting 式の導出を行った。

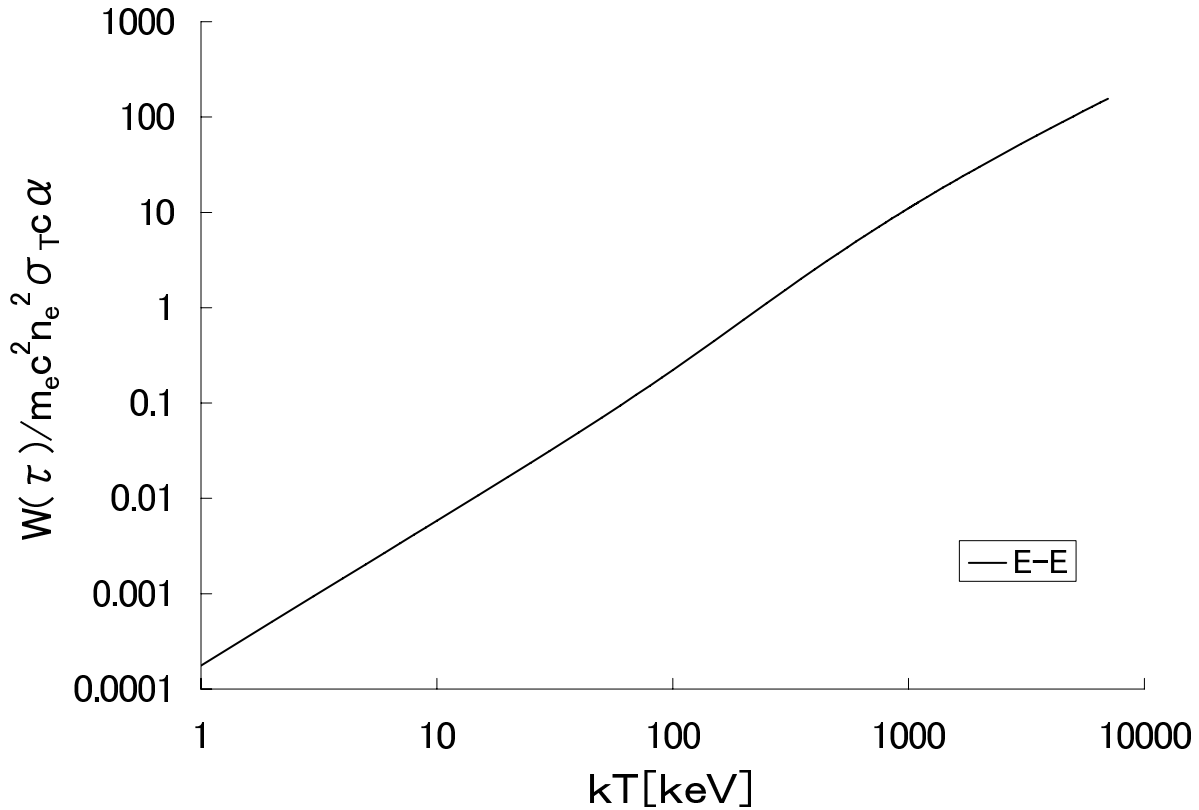


図 3.21: 相対論的電子 - 電子熱制動放射 Emissivity

3.3 Fitting

今回の Fitting では PPR・Emissivity について、温度領域を 2 分割し Fitting 関数を導出した。

$$\begin{cases} 1\text{keV} \leq k_B T \leq 300\text{keV} & \dots \text{領域 I} \\ 300\text{keV} \leq k_B T \leq 7\text{MeV} & \dots \text{領域 II} \end{cases} \quad (3.46)$$

領域 I はクーロン相互作用の寄与を考慮した領域。領域 II はクーロン相互作用による寄与を無視した領域となっている。

3.3.1 領域 I ($1\text{keV} \leq k_B T \leq 300\text{keV}$)

•PPR

この領域ではクーロン相互作用の寄与を考慮して Fitting を行った。

$$P_{ee}^I(k, \tau) = n_e^2 \sigma_T c \alpha \frac{e^{-x}}{x} \frac{1}{\sqrt{\tau}} G_{PW}^I(x, \tau) F_{CC}^I(x, \tau), \quad (3.47)$$

但し、 $G_{PW}^I(x, \tau)$ は平面波近似 (PW) であり、 $G(x, \tau; f_{ee} = 1)$ を意味する。Fitting 式は以下のものを得た。

$$G_{PW}^I(x, \tau) = \sum_{i=0}^2 A_i^I(\tau) x^i - e^x E_i(-x) \sum_{i=0}^1 B_i^I(\tau) x^i, \quad (3.48)$$

$$A_i^I(\tau) = \sum_{j=0}^8 a_{ij}^I \tau^{j/8}, \quad (3.49)$$

$$B_i^I(\tau) = \sum_{j=0}^8 b_{ij}^I \tau^{j/8}, \quad (3.50)$$

但し、 $E_i(-x)$ は指数積分関数である。Fitting 係数 a_{ij}^I 、 b_{ij}^I は次に示した。また、 $F_{CC}^I(x, \tau)$ はクーロン相互作用の寄与を Fitting したものである。

計算結果より、クーロン相互作用の最大寄与は $k_B T = 1\text{keV}$ 、 10keV 、 100keV 、 300keV でそれぞれ 17%、5%、0.7%、0.2% となった。その為、Elwert Factor の Fitting は $k_B T \geq 300\text{keV}$ まで行う事とした。

以下の関数を得た。

$$F_{CC}^I(x, \tau) = 1 + \sum_{i=2}^6 C_i^I(\tau) x^{i/8}, \quad (3.51)$$

$$C_i^I(\tau) = \sum_{j=0}^6 c_{ij}^I \tau^{j/6}. \quad (3.52)$$

Fitting 係数 c_{ij}^I は次に示した。Fitting 関数 $G_{PW}^I(x, \tau)$ 、 $F_{CC}^I(x, \tau)$ は $1\text{keV} \leq k_B T \leq 300\text{keV}$ 、 $10^{-4} \leq x \leq 10$ の範囲で用いる事が出来る。今回、 $G_{PW}^I(x, \tau)$ 、 $F_{CC}^I(x, \tau)$ を数値積分の結果と比較した。 $G_{PW}^I(x, \tau)$ 、 $F_{CC}^I(x, \tau)$ それぞれの最大誤差は 0.5%、0.2% となった。また、 $\text{PPR}P_{ee}^I(k, \tau)$ の最大誤差は 0.5% 以下となった。

表 3.1: Fitting 係数 a_{ij}^I, b_{ij}^I .

| | a_{0j}^I | a_{1j}^I | a_{2j}^I | b_{0j}^I | b_{1j}^I |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $j=0$ | -3.7369800E+1 | -9.3647000E+0 | 9.2170000E-1 | -1.1628100E+1 | -8.6991000E+0 |
| $j=1$ | 3.8036590E+2 | 9.5918600E+1 | -1.3498800E+1 | 1.2560660E+2 | 6.3383000E+1 |
| $j=2$ | -1.4898014E+3 | -3.9701720E+2 | 7.6453900E+1 | -5.3274890E+2 | -1.2889390E+2 |
| $j=3$ | 2.8614150E+3 | 8.4293760E+2 | -2.1783010E+2 | 1.1423873E+3 | -1.3503120E+2 |
| $j=4$ | -2.3263704E+3 | -9.0730760E+2 | 3.2097530E+2 | -1.1568545E+3 | 9.7758380E+2 |
| $j=5$ | -6.9161180E+2 | 3.0688020E+2 | -1.8806670E+2 | 7.5010200E+1 | -1.6499529E+3 |
| $j=6$ | 2.8537893E+3 | 2.9129830E+2 | -8.2416100E+1 | 9.9681140E+2 | 1.2586812E+3 |
| $j=7$ | -2.0407952E+3 | -2.9902530E+2 | 1.6371910E+2 | -8.8818950E+2 | -4.0474610E+2 |
| $j=8$ | 4.9259810E+2 | 7.6346100E+1 | -6.0024800E+1 | 2.5013860E+2 | 2.7335400E+1 |

表 3.2: Fitting 係数 c_{ij}^I .

| | c_{2j}^I | c_{3j}^I | c_{4j}^I | c_{5j}^I | c_{6j}^I |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $j=0$ | -5.7752000E+0 | 3.0558600E+1 | -5.4327200E+1 | 3.6262500E+1 | -8.4082000E+0 |
| $j=1$ | 4.6209700E+1 | -2.4821770E+2 | 4.5096760E+2 | -3.1009720E+2 | 7.4792500E+1 |
| $j=2$ | -1.6072800E+2 | 8.7419640E+2 | -1.6165987E+3 | 1.1380531E+3 | -2.8295400E+2 |
| $j=3$ | 3.0500700E+2 | -1.6769028E+3 | 3.1481061E+3 | -2.2608347E+3 | 5.7639300E+2 |
| $j=4$ | -3.2954200E+2 | 1.8288677E+3 | -3.4783930E+3 | 2.5419361E+3 | -6.6193900E+2 |
| $j=5$ | 1.9107700E+2 | -1.0689366E+3 | 2.0556693E+3 | -1.5252058E+3 | 4.0429300E+2 |
| $j=6$ | -4.6271800E+1 | 2.6056560E+2 | -5.0567890E+2 | 3.8008520E+2 | -1.0223300E+2 |

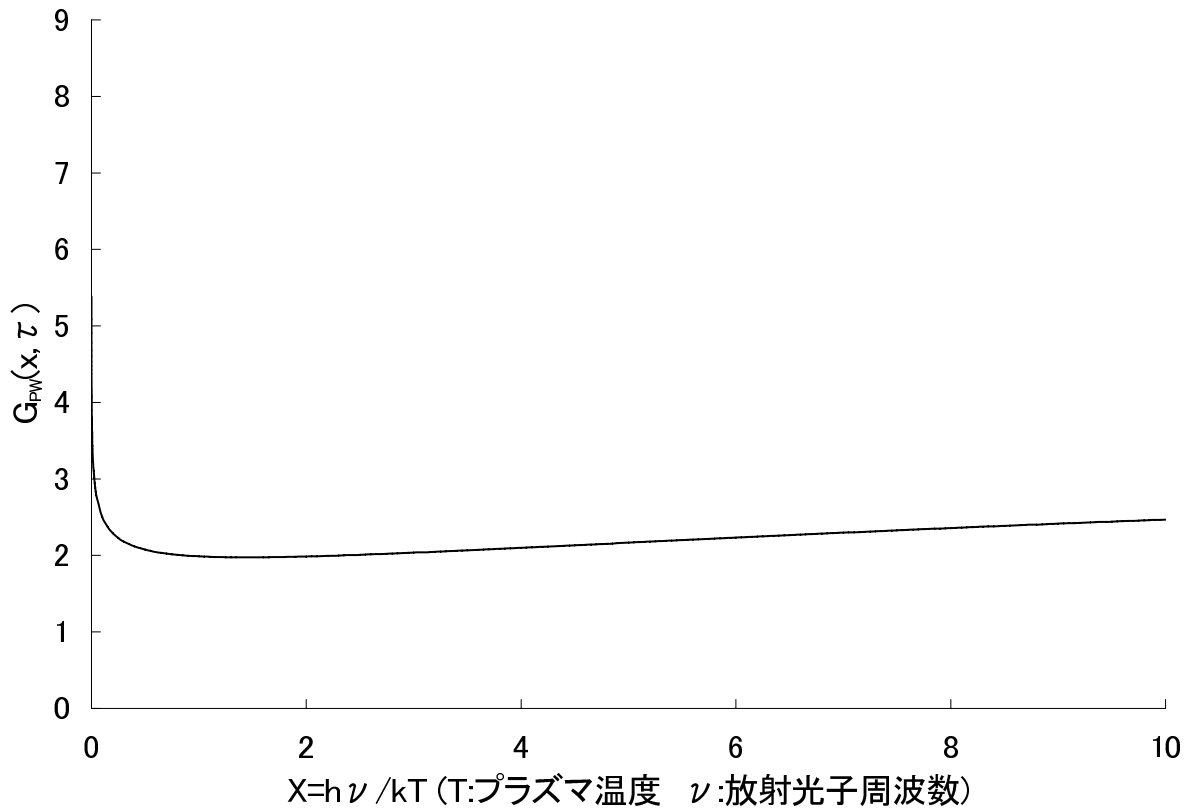


図 3.22: クーロン相互作用を無視した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR Fitting 計算
 $k_B T = 1\text{keV}$

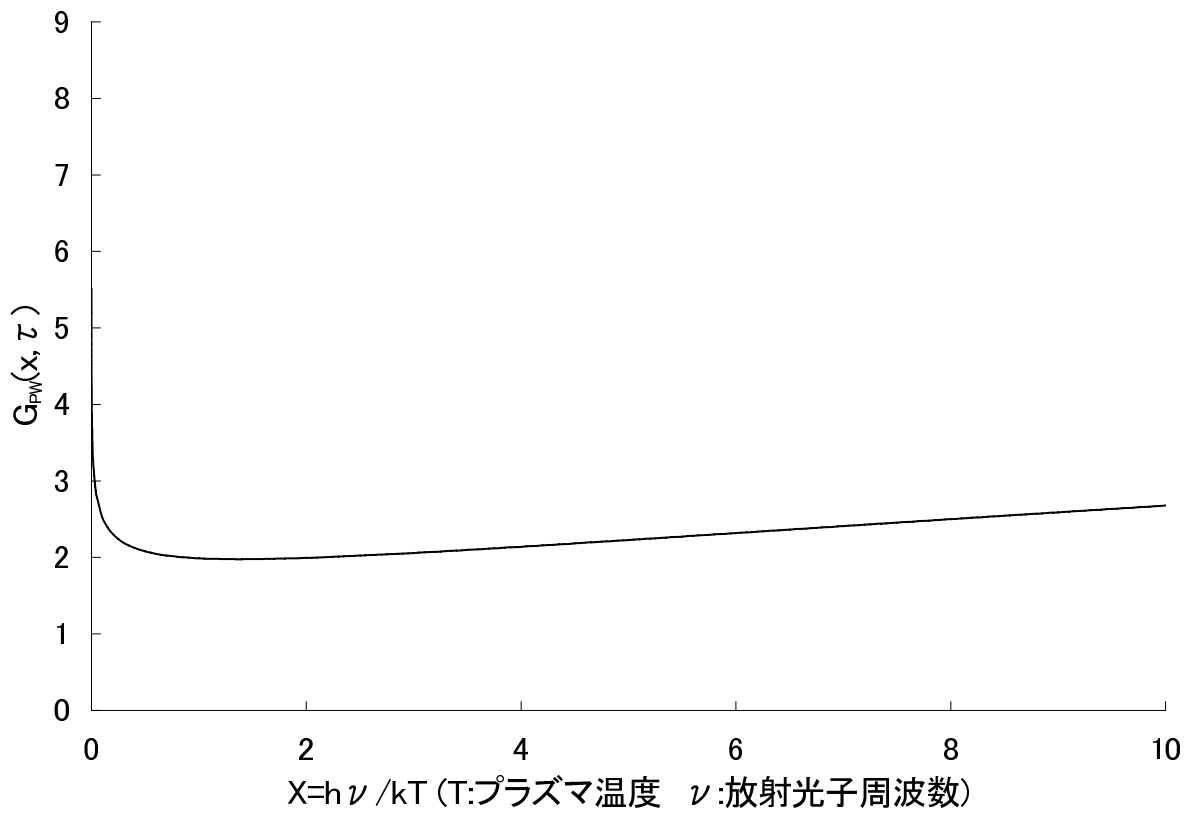


図 3.23: クーロン相互作用を無視した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR Fitting 計算
 $k_B T = 10\text{keV}$

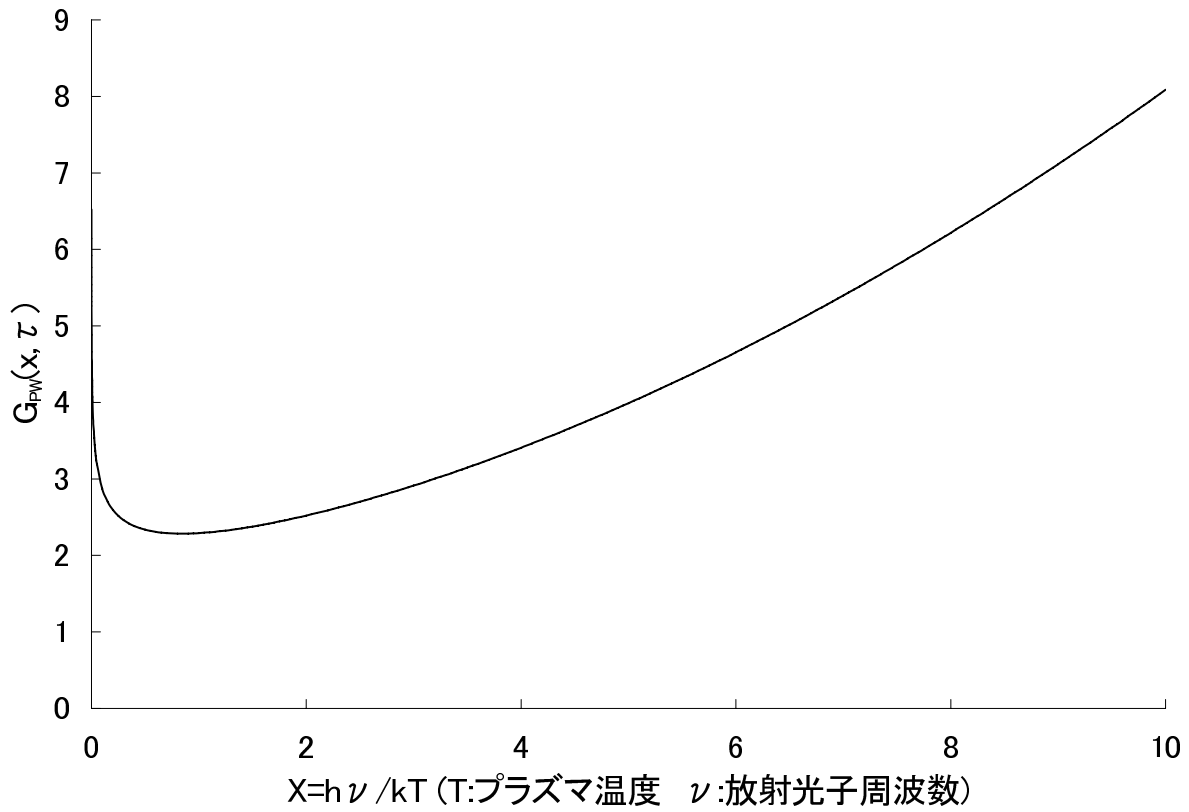


図 3.24: クーロン相互作用を無視した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR Fitting 計算
 $k_B T = 100 \text{keV}$

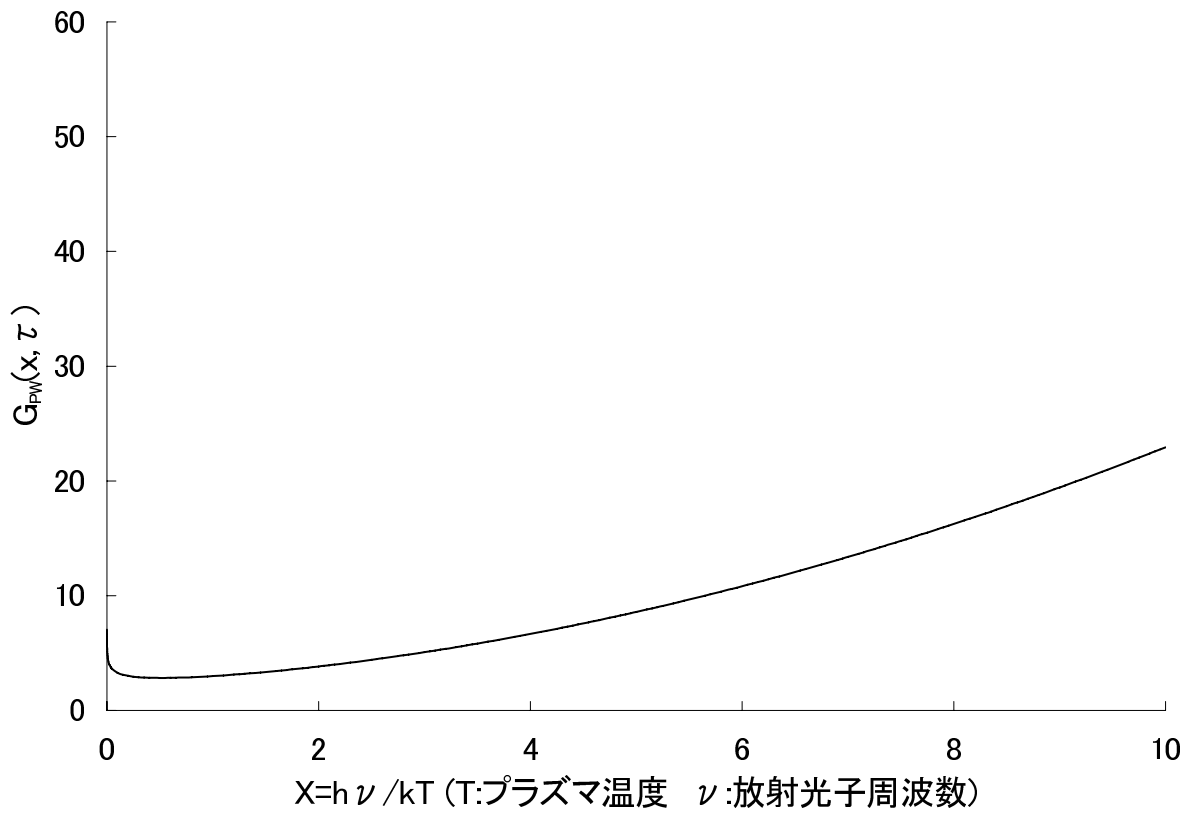


図 3.25: クーロン相互作用を無視した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR Fitting 計算
 $k_B T = 300 \text{keV}$

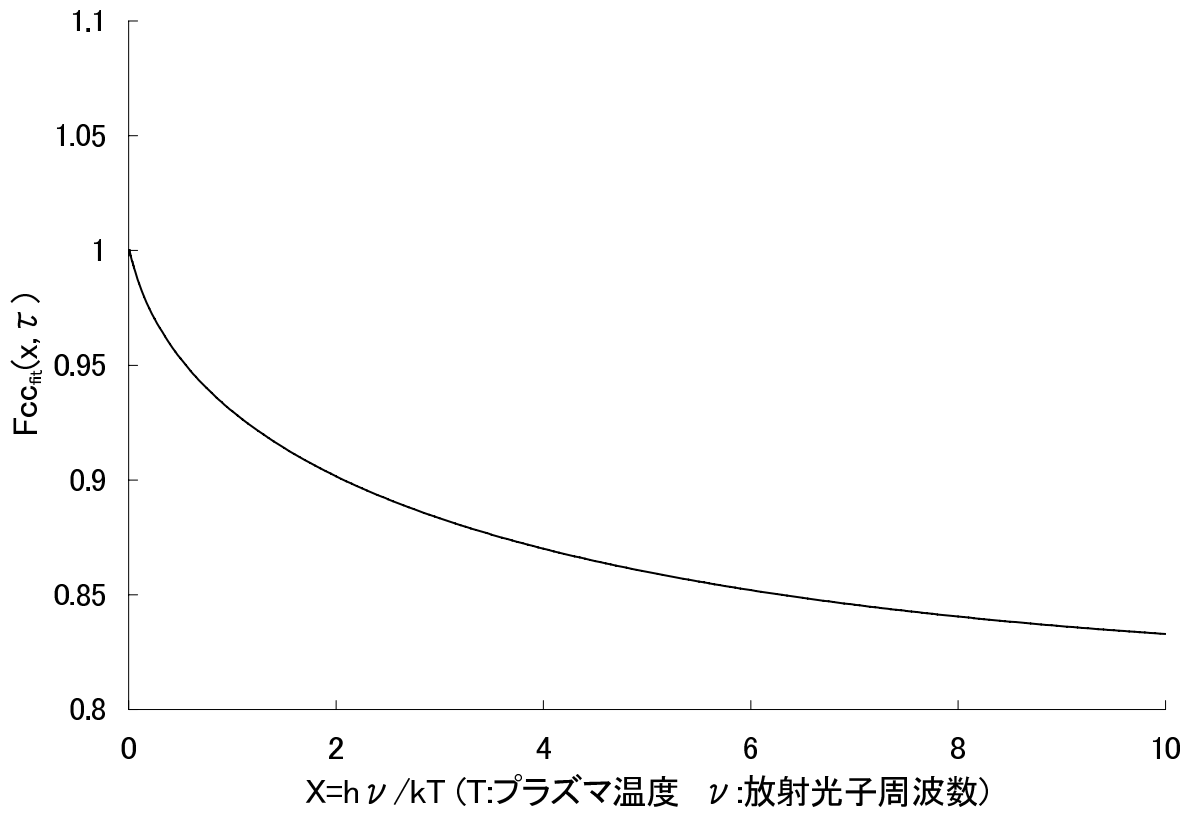


図 3.26: 相対論的電子 - 電子熱制動放射 Elwert Factor Fitting 計算 $k_B T = 1\text{keV}$

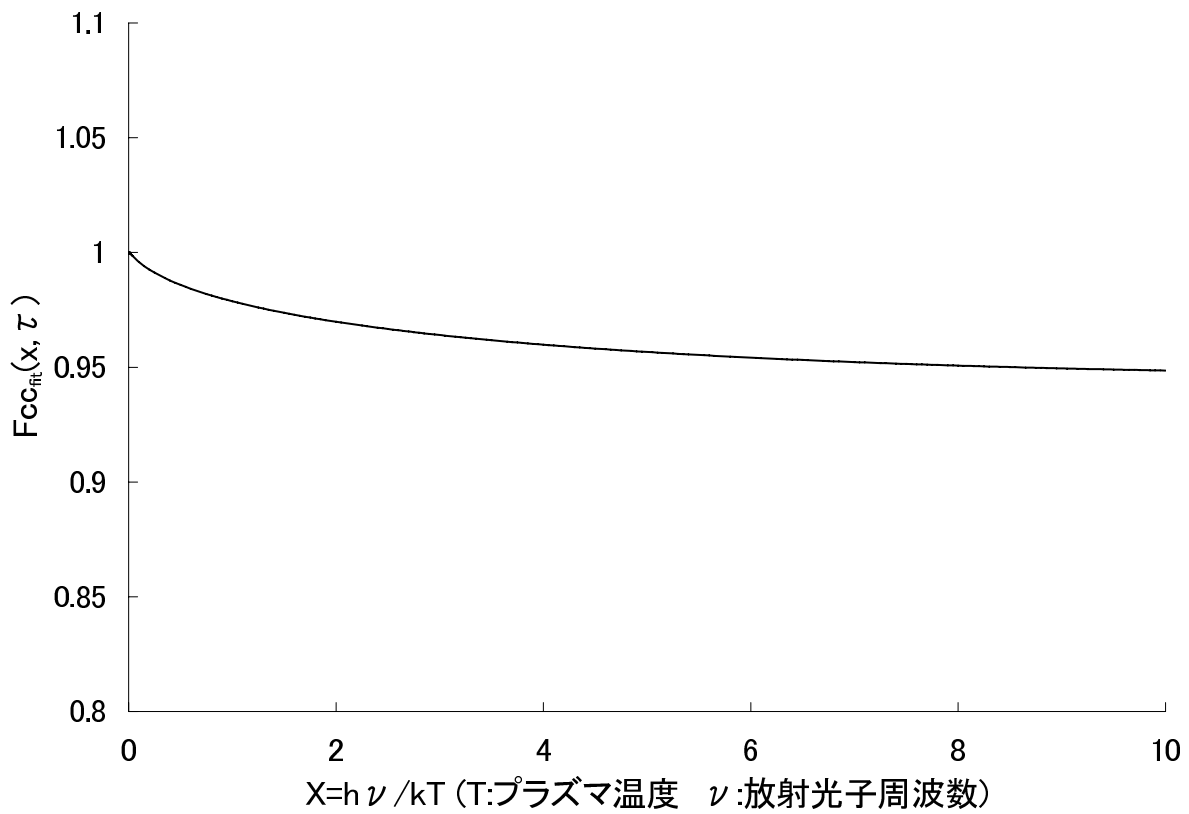


図 3.27: 相対論的電子 - 電子熱制動放射 Elwert Factor Fitting 計算 $k_B T = 10\text{keV}$

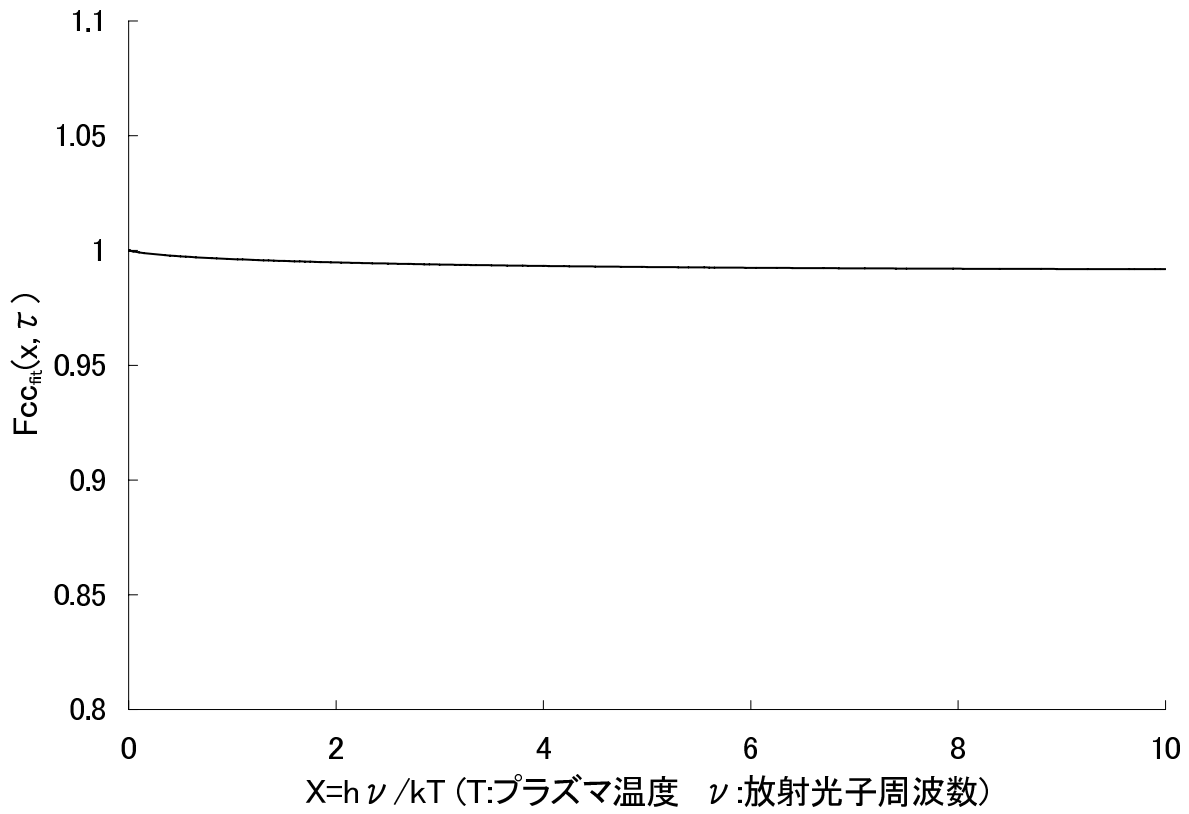


図 3.28: 相対論的電子 - 電子熱制動放射 Elwert Factor Fitting 計算 $k_B T = 100\text{keV}$

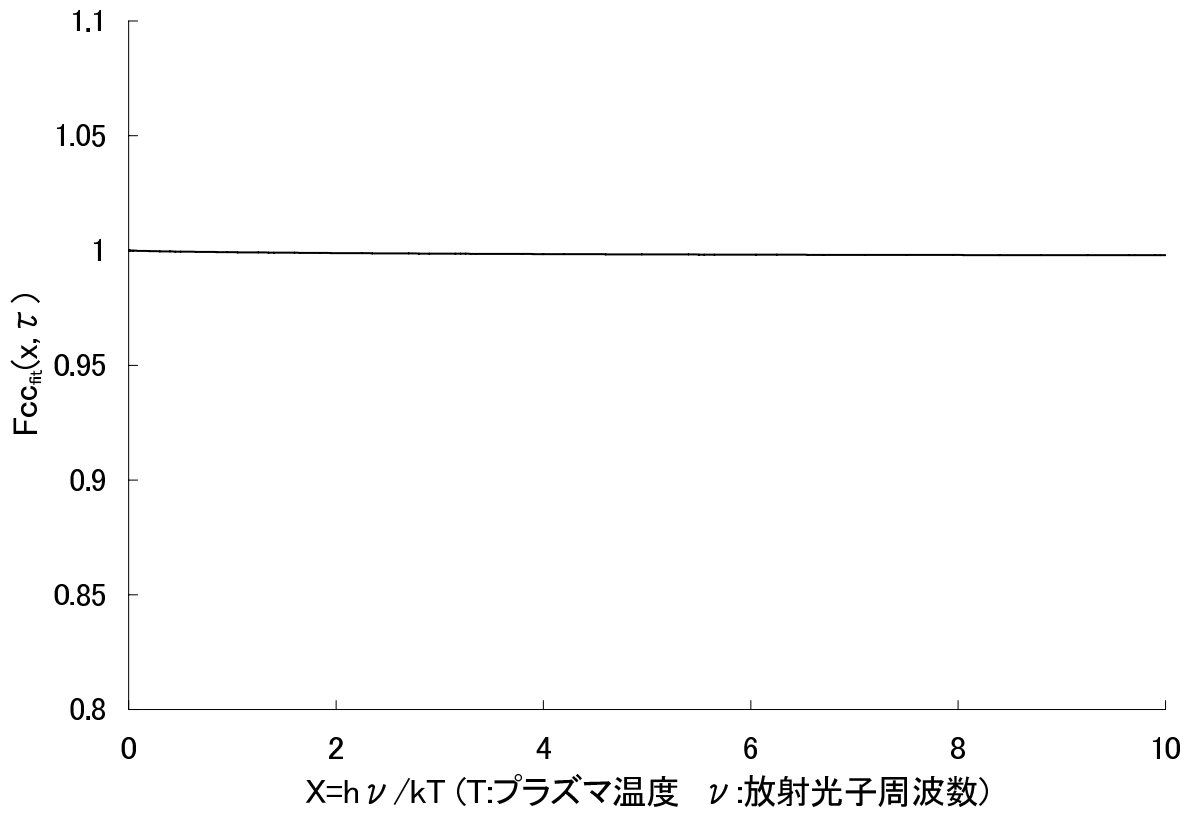


図 3.29: 相対論的電子 - 電子熱制動放射 Elwert Factor Fitting 計算 $k_B T = 300\text{keV}$

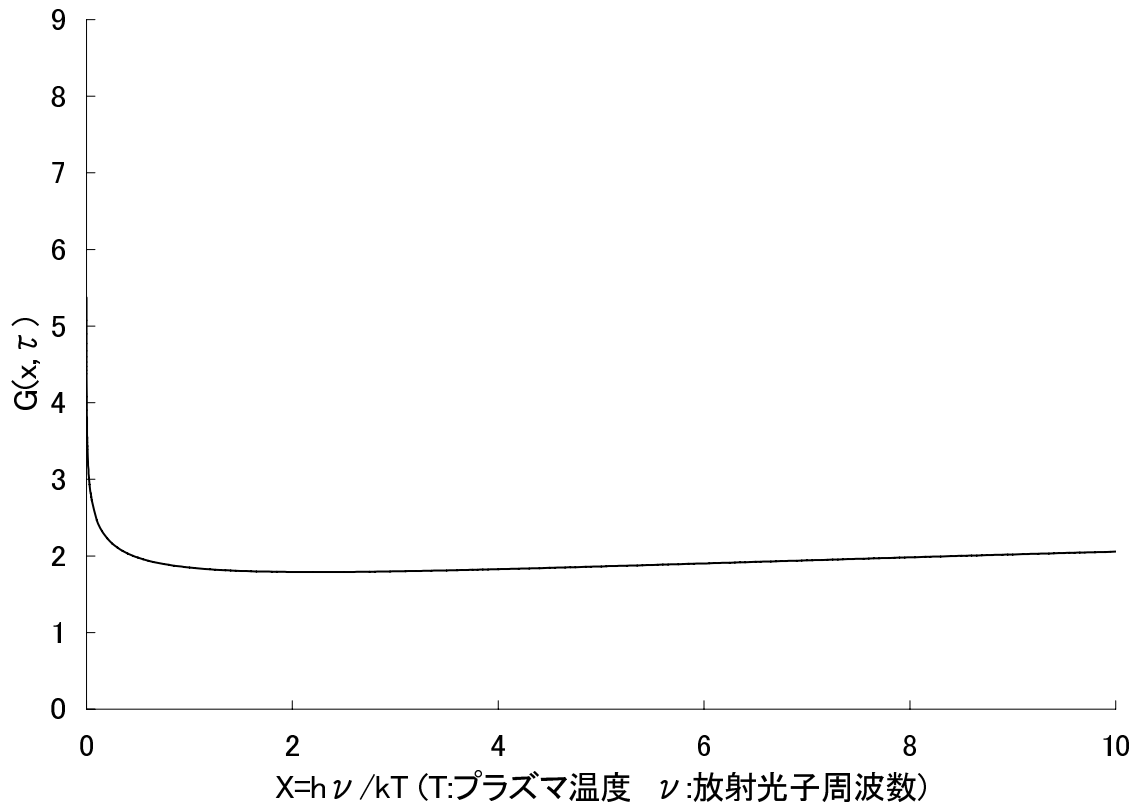


図 3.30: クーロン相互作用を考慮した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR Fitting 計算
 $k_B T = 1 \text{ keV}$

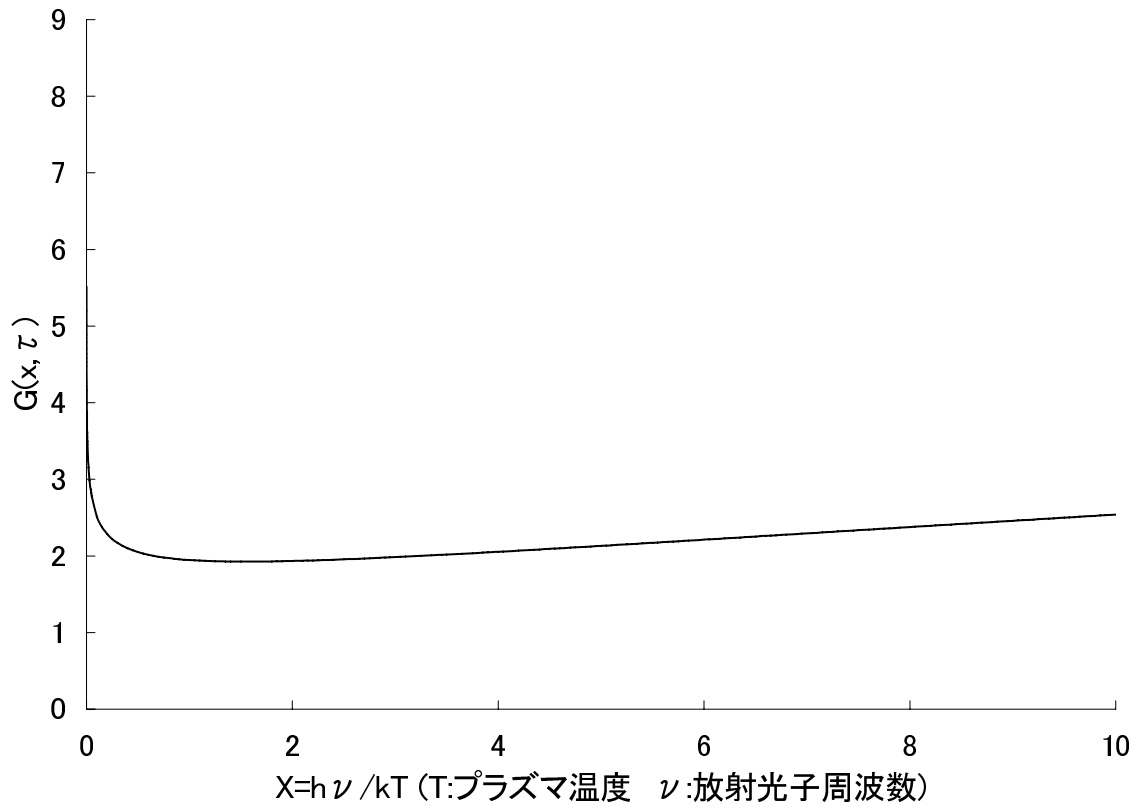


図 3.31: クーロン相互作用を考慮した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR Fitting 計算
 $k_B T = 10\text{keV}$

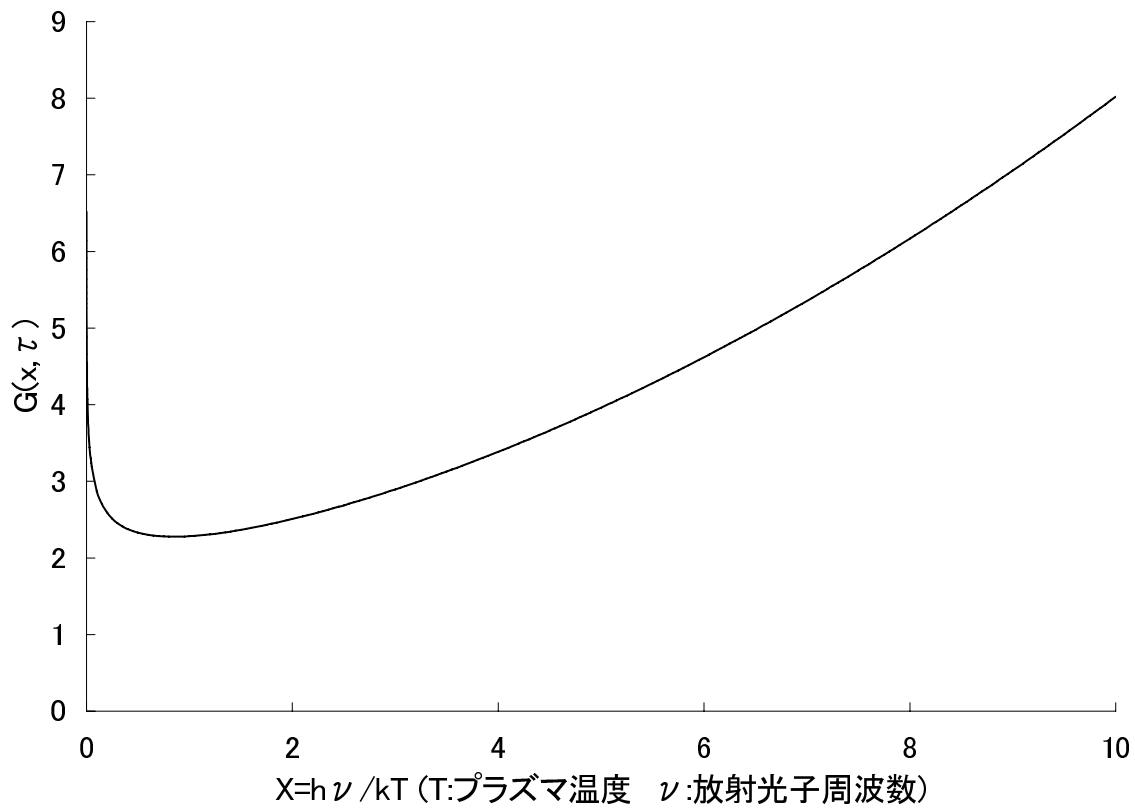


図 3.32: クーロン相互作用を考慮した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR Fitting 計算
 $k_B T = 100 \text{keV}$

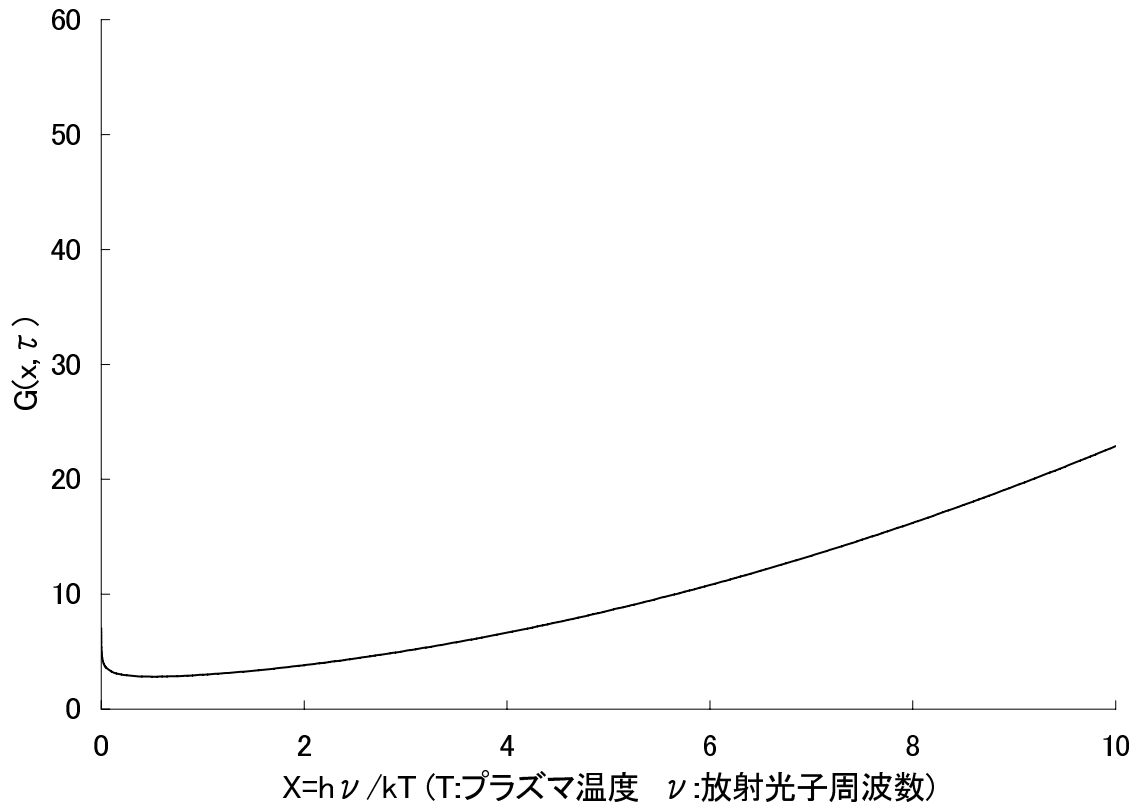


図 3.33: クーロン相互作用を考慮した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR Fitting 計算
 $k_B T = 300 \text{keV}$

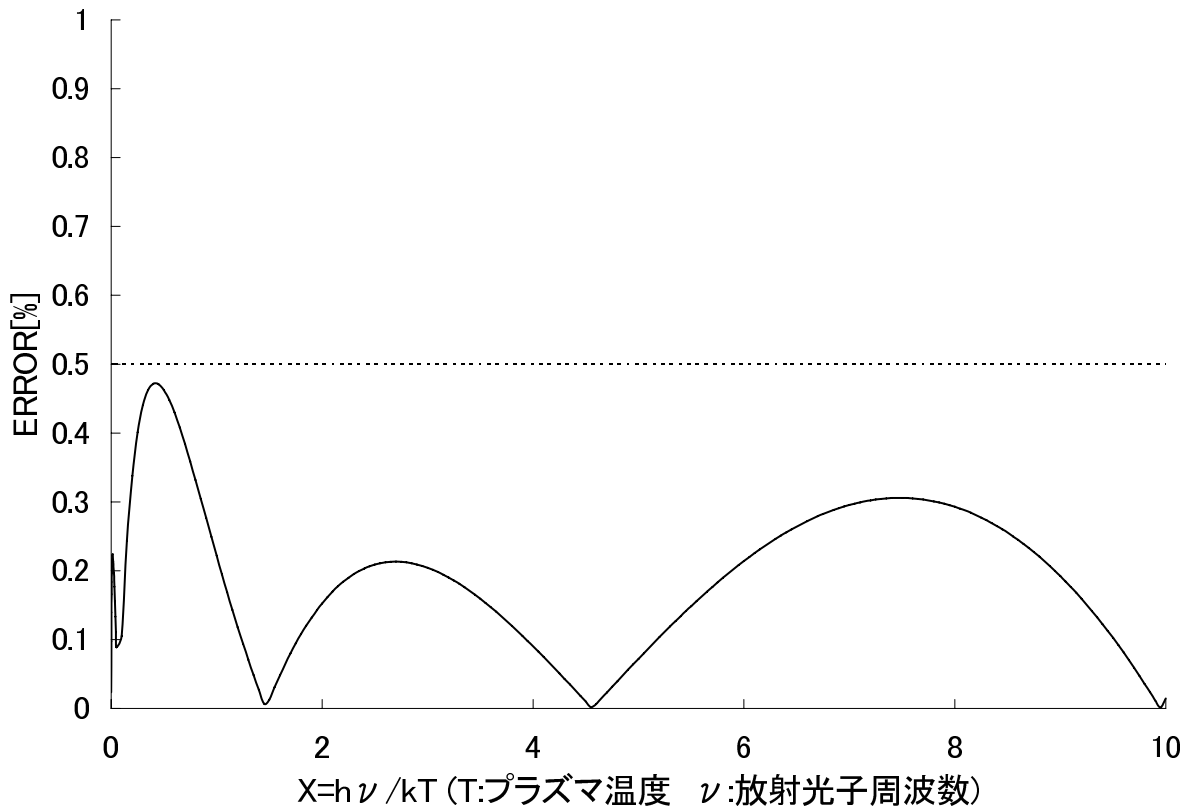


図 3.34: クーロン相互作用を無視した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR Fitting 誤差
 $k_B T = 1 \text{ keV}$

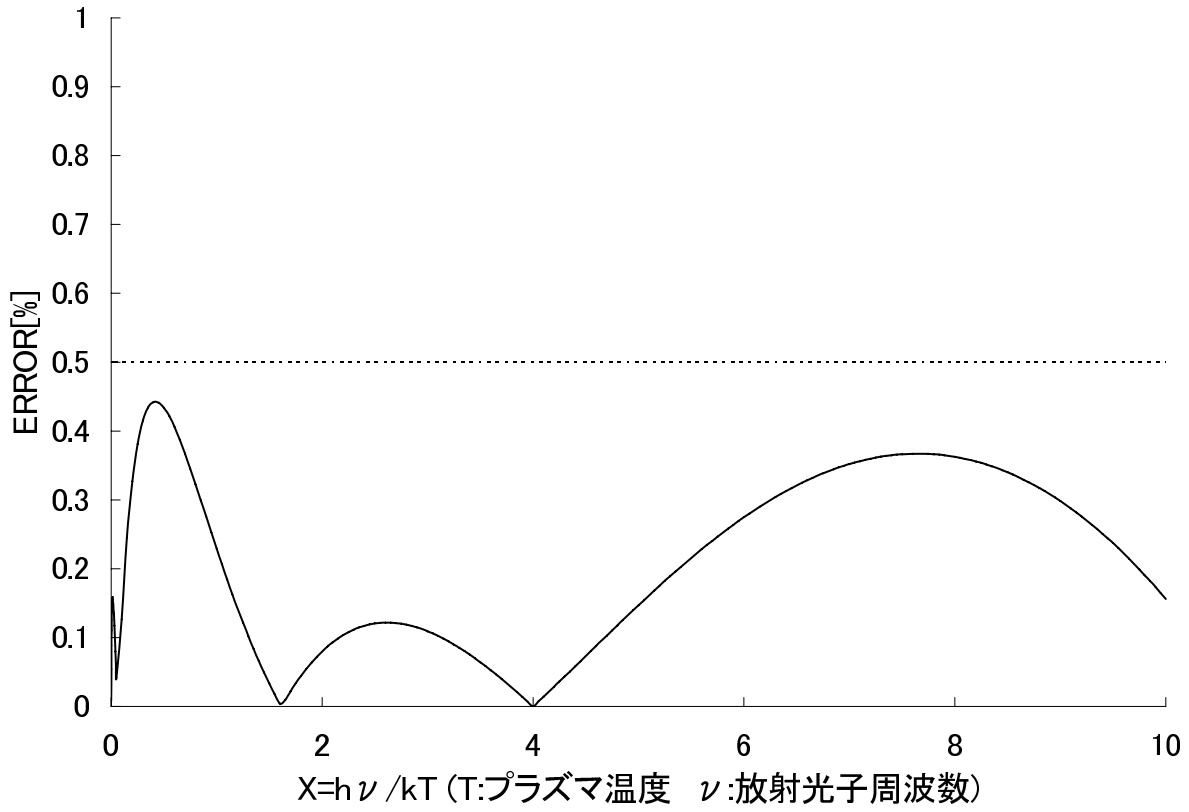


図 3.35: クーロン相互作用を無視した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR Fitting 誤差
 $k_B T = 10\text{keV}$

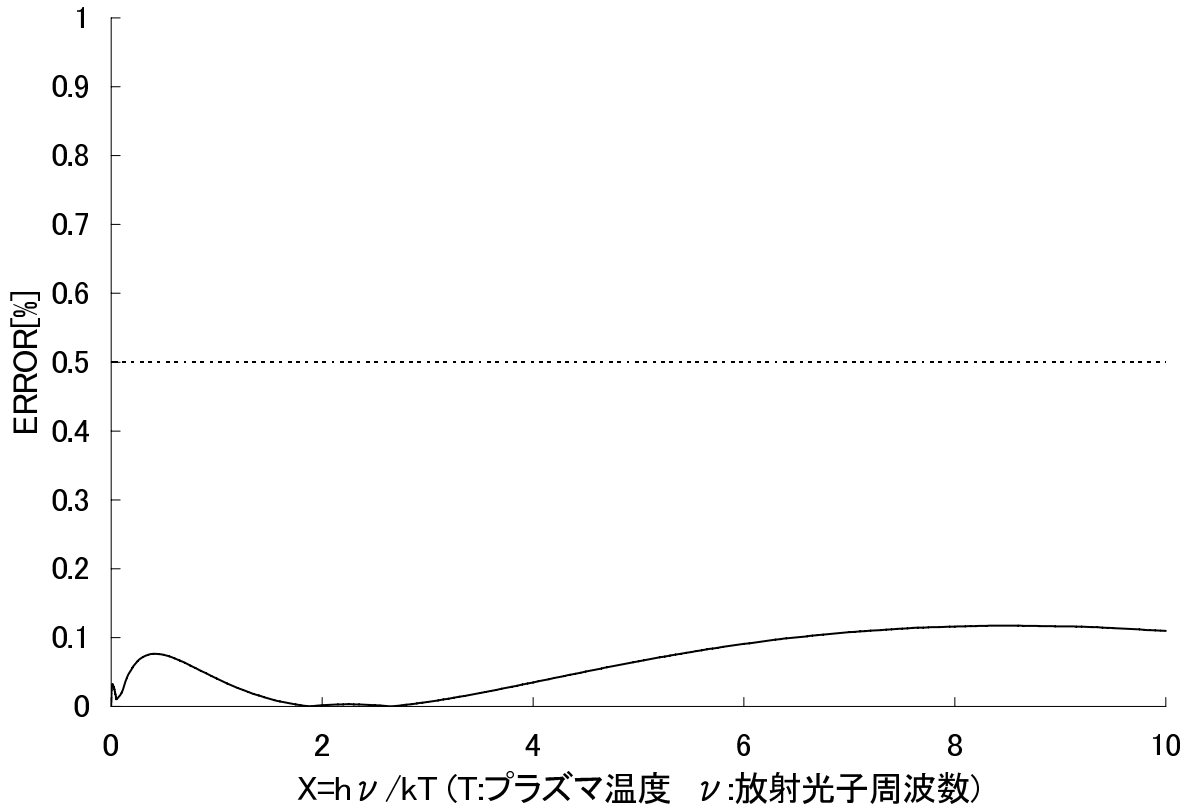


図 3.36: クーロン相互作用を無視した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR Fitting 誤差
 $k_B T = 100 \text{keV}$

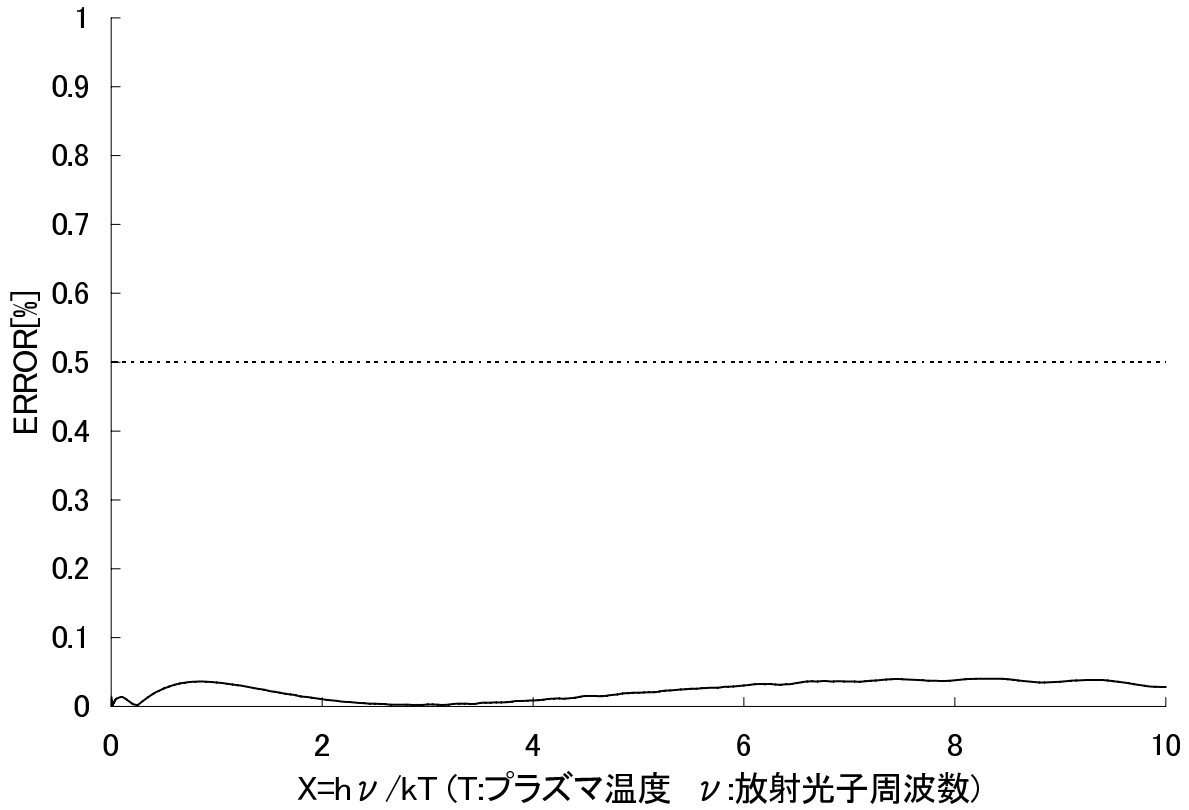


図 3.37: クーロン相互作用を無視した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR Fitting 誤差
 $k_B T = 300\text{keV}$

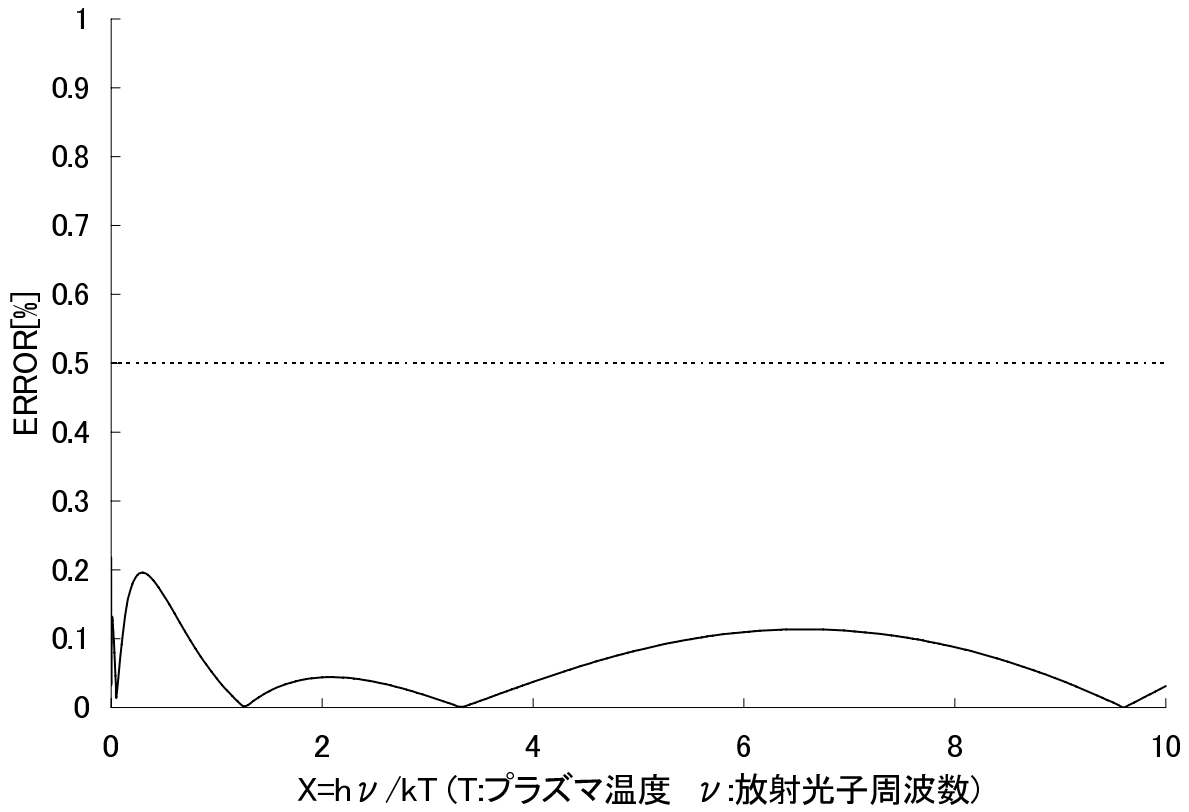


図 3.38: 相対論的電子 - 電子熱制動放射 Elwert Factor Fitting 誤差 $k_B T = 1\text{keV}$

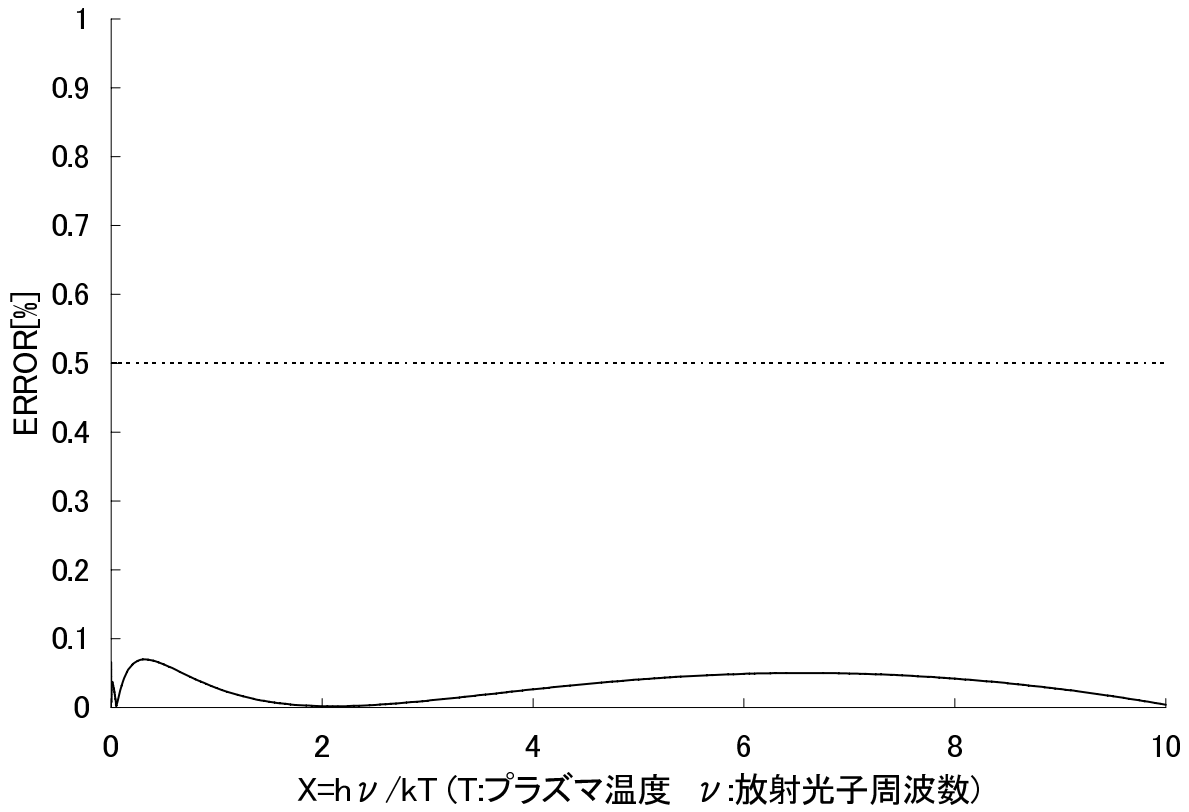


図 3.39: 相対論的電子 - 電子熱制動放射 Elwert Factor Fitting 誤差 $k_B T = 10\text{keV}$

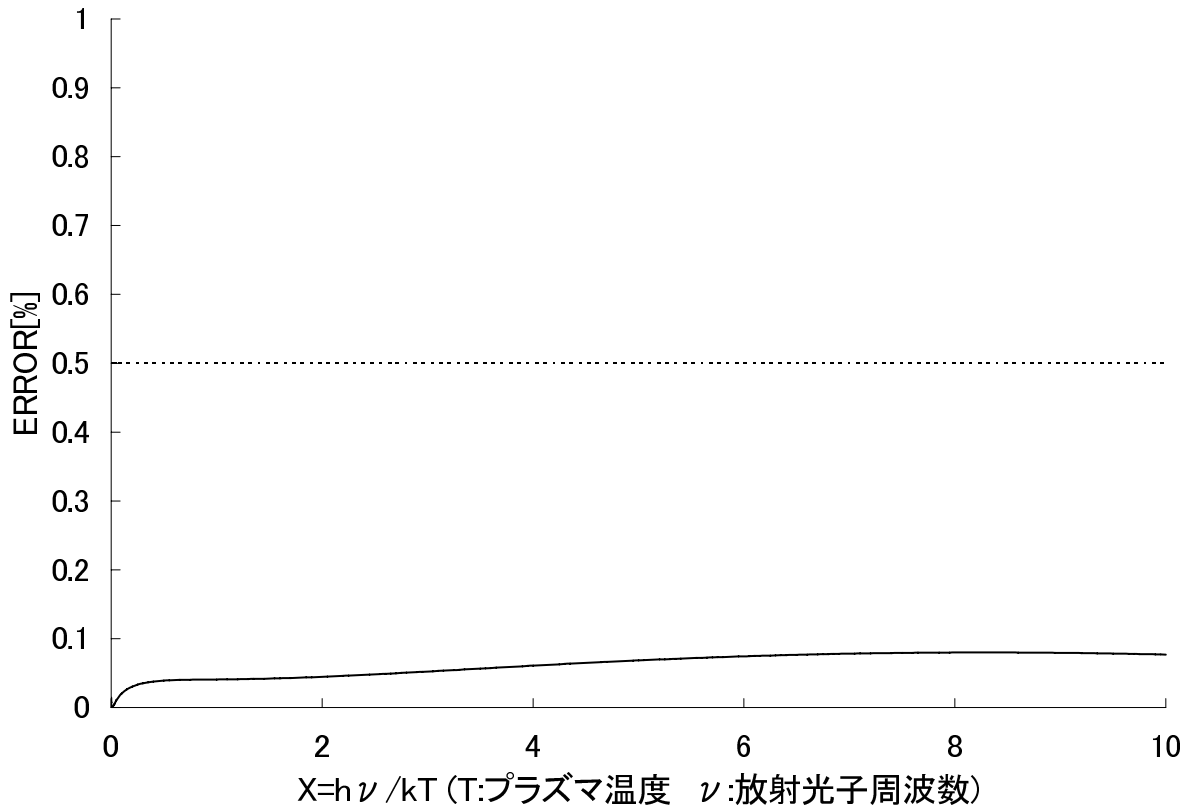


図 3.40: 相対論的電子 - 電子熱制動放射 Elwert Factor Fitting 誤差 $k_B T = 100\text{keV}$

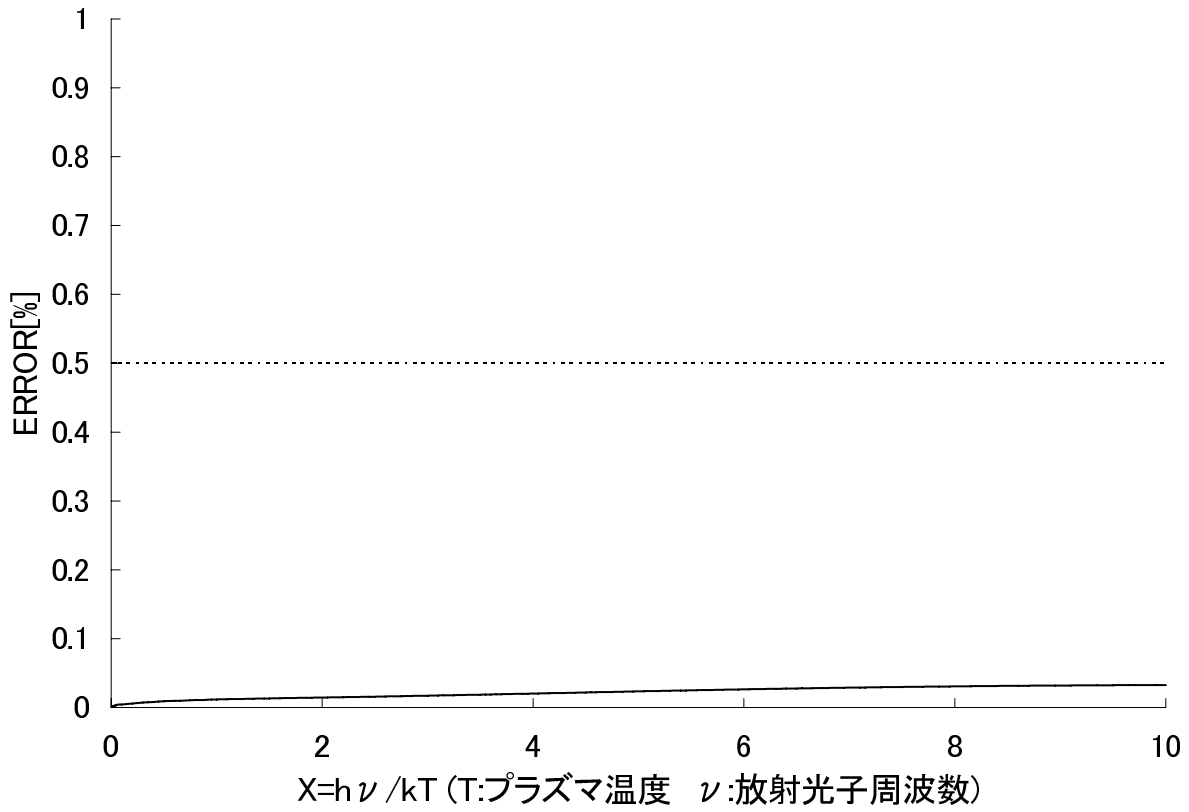


図 3.41: 相対論的電子 - 電子熱制動放射 Elwert Factor Fitting 誤差 $k_B T = 300\text{keV}$

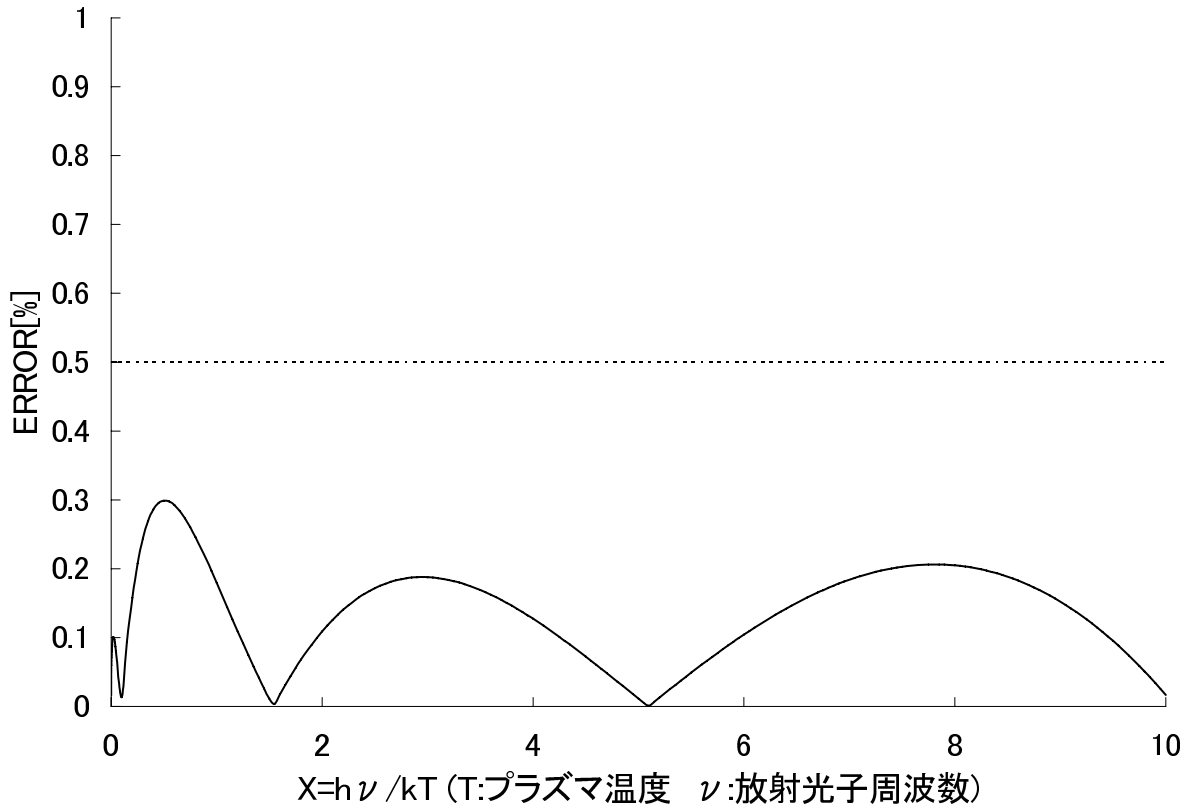


図 3.42: クーロン相互作用を考慮した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR Fitting 誤差
 $k_B T = 1\text{keV}$

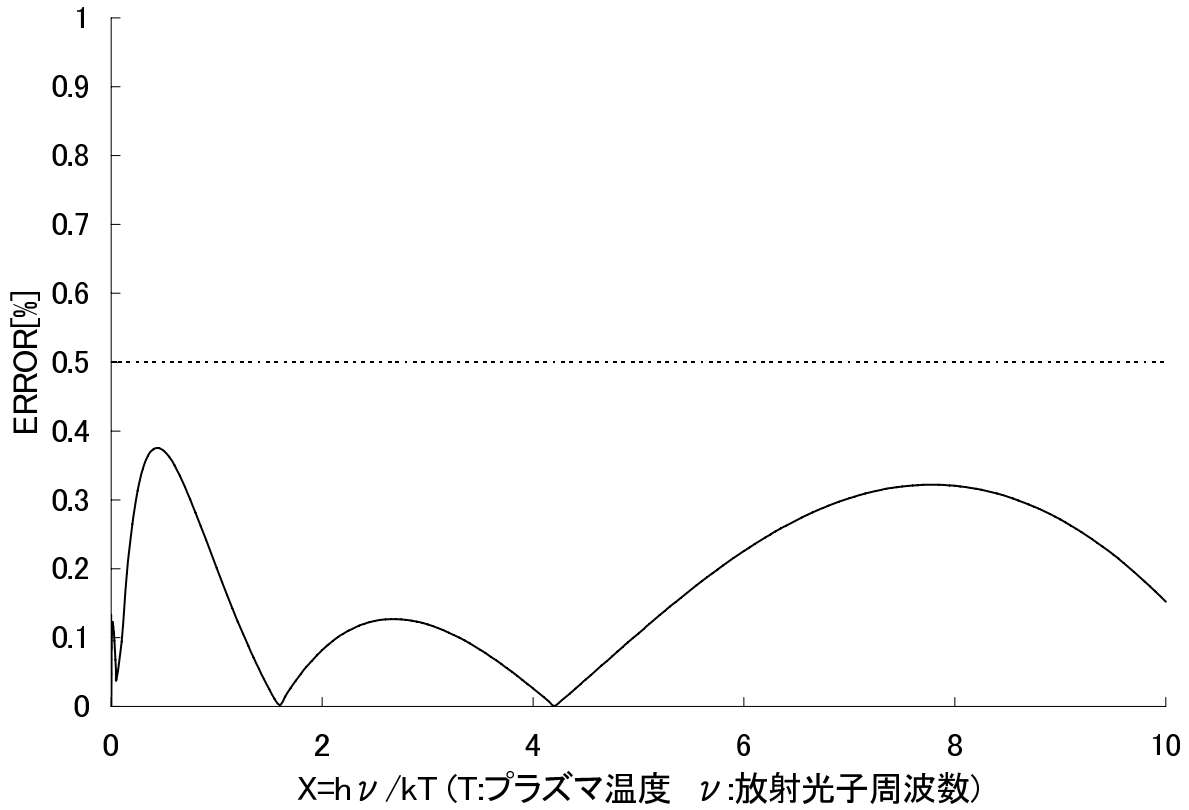


図 3.43: クーロン相互作用を考慮した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR Fitting 誤差
 $k_B T = 10\text{keV}$

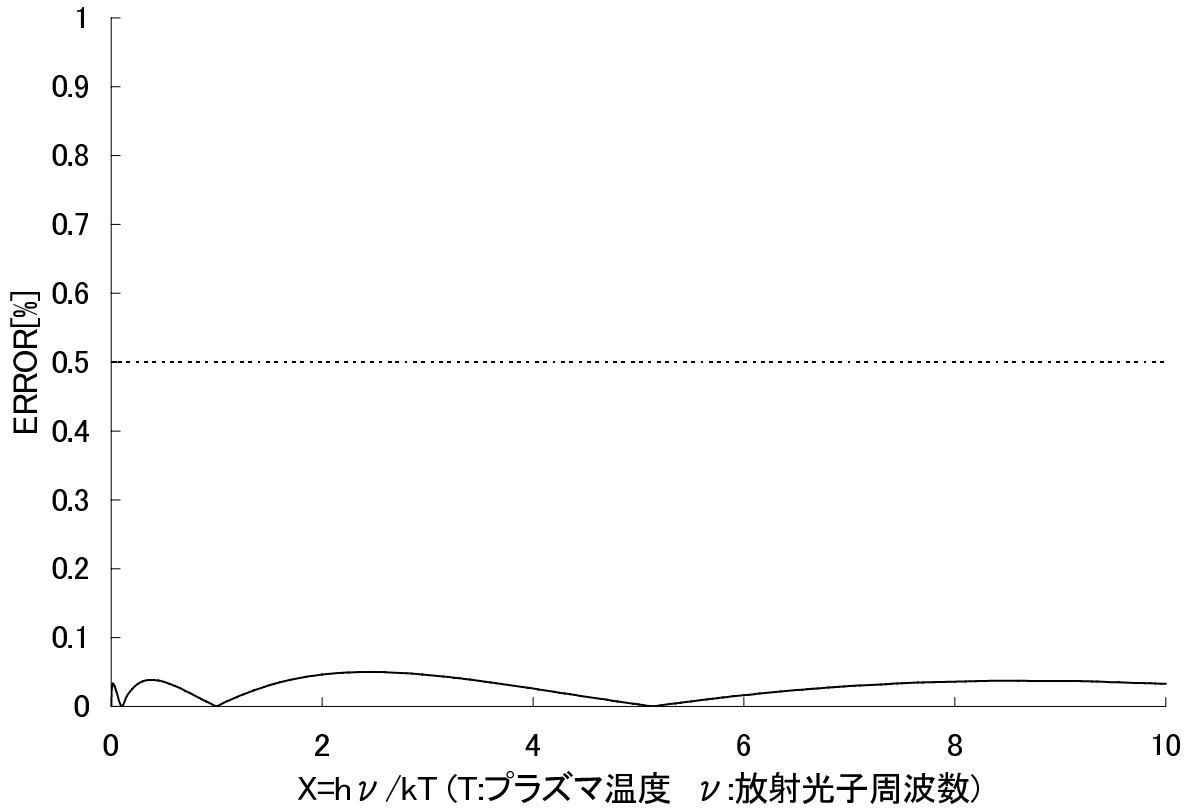


図 3.44: クーロン相互作用を考慮した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR Fitting 誤差
 $k_B T = 100\text{keV}$

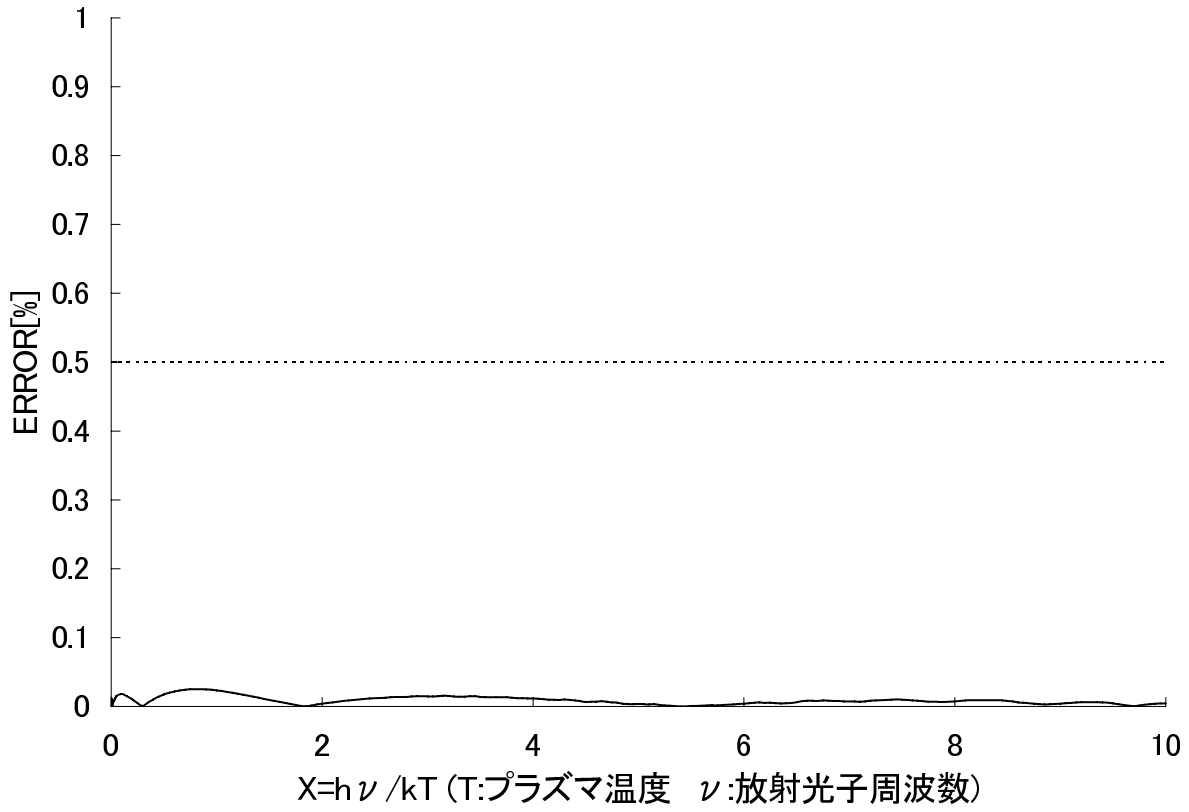


図 3.45: クーロン相互作用を考慮した場合の相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR Fitting 誤差
 $k_B T = 300 \text{keV}$

•Emissivity

次に Emissivity の Fitting 関数について。まず W_{ee} は

$$W_{ee}(\tau) = m_e c^2 \int_0^\infty dk k P_{ee}(k, \tau) \quad (3.53)$$

により与えられる。PPR は

$$P_{ee}(k, \tau) = n_e^2 \sigma_T c \alpha \frac{e^{-x}}{x} \frac{1}{\sqrt{\tau}} G(x, \tau) \quad (3.54)$$

であるから、

$$W_{ee}(\tau) = m_e c^2 n_e^2 \sigma_T c \alpha \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_0^\infty dk k \frac{e^{-x}}{x} G(x, \tau) \quad (3.55)$$

となる。ここで、

$$x = \frac{k}{\tau}$$

$$dk = \tau dx$$

より、

$$\begin{aligned} W_{ee}(\tau) &= m_e c^2 n_e^2 \sigma_T c \alpha \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_0^\infty dx x \tau^2 \frac{e^{-x}}{x} G(x, \tau) \\ &= m_e c^2 n_e^2 \sigma_T c \alpha \tau^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty dx e^{-x} G(x, \tau) \end{aligned} \quad (3.56)$$

を得る。一方、

$$W_{ee}^{FIT}(\tau) = m_e c^2 \int_0^\infty dk k P_{ee}^{FIT}(k, \tau) \quad (3.57)$$

$$P_{ee}^{FIT}(k, \tau) = n_e^2 \sigma_T c \alpha \frac{e^{-x}}{x} \frac{1}{\sqrt{\tau}} G^{FIT}(x, \tau) \quad (3.58)$$

より、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx e^{-x} G^{FIT}(x, \tau) &= \int_0^\infty dx e^{-x} G^{FIT}(x, \tau) \\ &= \int_0^\infty dx e^{-x} G_{PW}(x, \tau) F_{CC}(x, \tau) \end{aligned} \quad (3.59)$$

となる。具体的には

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx e^{-x} G^{FIT}(x, \tau) &= \int_0^\infty dx e^{-x} \left\{ \sum_{i=0}^2 A_i(\tau) x^i - e^x E_i(-x) \sum_{i=0}^1 B_i(\tau) x^i \right\} \\ &\quad \times \left\{ 1 + \sum_{k=2}^6 C_k(\tau) x^{\frac{k}{8}} \right\} \\ &= \sum_{i=0}^2 A_i(\tau) \int_0^\infty dx e^{-x} x^i - \sum_{i=0}^1 B_i(\tau) \int_0^\infty dx E_i(-x) x^i \\ &\quad + \sum_{i=0}^2 A_i(\tau) \sum_{k=2}^6 C_k(\tau) \int_0^\infty dx e^{-x} x^{i+\frac{k}{8}} \\ &\quad - \sum_{i=0}^1 B_i(\tau) \sum_{k=2}^6 C_k(\tau) \int_0^\infty dx E_i(-x) x^{i+\frac{k}{8}} \end{aligned} \quad (3.60)$$

とする事が出来る。ここで、

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x} x^i = \Gamma(i+1) \quad (3.61)$$

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x} x^{i+\frac{k}{8}} = \Gamma\left(i + \frac{k}{8} + 1\right) \quad (3.62)$$

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x} E_i(-x) x^i = -\frac{1}{i+1} \Gamma(i+1) \quad (3.63)$$

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x} E_i(-x) x^{i+\frac{k}{8}} = -\frac{1}{i + \frac{k}{8} + 1} \Gamma\left(i + \frac{k}{8} + 1\right) \quad (3.64)$$

$$\Gamma(i+1) = i! \quad (3.65)$$

を用いると、

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx e^{-x} G^{FIT}(x, \tau) &= \sum_{i=0}^2 A_i(\tau) \Gamma(i+1) + \sum_{i=0}^1 B_i(\tau) \frac{1}{i+1} \Gamma(i+1) \\ &+ \sum_{i=0}^2 A_i(\tau) \sum_{k=2}^6 C_k(\tau) \Gamma\left(i + \frac{k}{8} + 1\right) \\ &+ \sum_{i=0}^1 B_i(\tau) \sum_{k=2}^6 C_k(\tau) \frac{1}{i + \frac{k}{8} + 1} \Gamma\left(i + \frac{k}{8} + 1\right) \\ &= \sum_{i=0}^2 A_i(\tau) i! + \sum_{i=0}^1 B_i(\tau) \frac{i!}{i+1} \\ &+ \sum_{i=0}^2 A_i(\tau) \sum_{k=2}^6 C_k(\tau) \Gamma\left(i + \frac{k}{8} + 1\right) \\ &+ \sum_{i=0}^1 B_i(\tau) \sum_{k=2}^6 C_k(\tau) \frac{1}{i + \frac{k}{8} + 1} \Gamma\left(i + \frac{k}{8} + 1\right) \\ &= A_0(\tau) + A_1(\tau) + 2A_2(\tau) + B_0(\tau) \\ &+ \frac{1}{2}B_1(\tau) + \sum_{i=0}^2 A_i(\tau) \sum_{k=2}^6 C_k(\tau) \Gamma\left(i + \frac{k}{8} + 1\right) \\ &+ \sum_{i=0}^1 B_i(\tau) \sum_{k=2}^6 C_k(\tau) \frac{1}{i + \frac{k}{8} + 1} \Gamma\left(i + \frac{k}{8} + 1\right) \end{aligned} \quad (3.66)$$

として表す事が出来る。

この事から、Emissivity についても PPR と同様の Fitting 係数を用いて Fitting 計算を行うことが出来る。

よって、 $W_{ee}^I(\tau)$ は以下のものを得た。

$$W_{ee}^I(\tau) = m_e c^2 n_e^2 \sigma_T c \alpha \tau^{3/2} G^I(\tau), \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} G^I(\tau) &= A_0^I(\tau) + A_1^I(\tau) + 2A_2^I(\tau) + B_0^I(\tau) + \frac{1}{2}B_1^I(\tau) \\ &+ \sum_{i=0}^2 \sum_{j=2}^6 \Gamma\left(i + \frac{j}{8} + 1\right) A_i^I(\tau) C_j^I(\tau) \\ &+ \sum_{i=0}^1 \sum_{j=2}^6 \frac{\Gamma\left(i + \frac{j}{8} + 1\right)}{i + \frac{j}{8} + 1} B_i^I(\tau) C_j^I(\tau), \end{aligned} \quad (3.68)$$

但し、 $\Gamma(i + j/8 + 1)$ は Γ 関数である。こちらも Fitting 範囲は $1\text{keV} \leq k_B T \leq 300\text{keV}$ である。最大誤差は 0.2% 以下となった。

3.3.2 領域 II ($300\text{keV} \leq k_B T \leq 7\text{MeV}$)

•PPR

この領域ではクーロン相互作用の寄与を無視して Fitting を行った。

$$P_{ee}^{II}(k, \tau) = n_e^2 \sigma_T c \alpha \frac{e^{-x}}{x} \frac{1}{\sqrt{\tau}} G_{PW}^{II}(x, \tau), \quad (3.69)$$

$$G_{PW}^{II}(x, \tau) = \sum_{i=0}^2 A_i^{II}(\tau) x^i - e^x E_i(-x) \sum_{i=0}^1 B_i^{II}(\tau) x^i, \quad (3.70)$$

$$A_i^{II}(\tau) = \sum_{j=0}^8 a_{ij}^{II} \tau^{j/8}, \quad (3.71)$$

$$B_i^{II}(\tau) = \sum_{j=0}^8 b_{ij}^{II} \tau^{j/8}, \quad (3.72)$$

Fitting 係数 a_{ij}^{II} 、 b_{ij}^{II} は次のものを得た。また、 $G_{PW}^{II}(x, \tau)$ の Fitting 範囲は $300\text{keV} \leq k_B T \leq 7\text{MeV}$ 、 $10^{-4} \leq x \leq 10$ である。Fitting 関数 $G_{PW}^{II}(x, \tau)$ と数値積分したものの最大誤差は 0.2% となった。また、7MeV において Alexanian の超相対論近似による計算と今回の Fitting を比較した場合、誤差は 0.8% となった。

表 3.3: Fitting 係数 a_{ij}^{II} , b_{ij}^{II} .

| | a_{0j}^{II} | a_{1j}^{II} | a_{2j}^{II} | b_{0j}^{II} | b_{1j}^{II} |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $j=0$ | 5.2163300E+1 | 4.9713900E+1 | 6.4751200E+1 | -8.5862000E+0 | 3.7643220E+2 |
| $j=1$ | -2.5703130E+2 | -1.8977460E+2 | -2.1389560E+2 | 3.4134800E+1 | -1.2233635E+3 |
| $j=2$ | 4.4681610E+2 | 2.7102980E+2 | 1.7414320E+2 | -1.1632870E+2 | 6.2867870E+2 |
| $j=3$ | -2.9305850E+2 | -2.6978070E+2 | 1.3650880E+2 | 2.9654510E+2 | 2.2373946E+3 |
| $j=4$ | 0.0000000E+0 | 4.2048120E+2 | -2.7148990E+2 | -3.9342070E+2 | -3.8288387E+3 |
| $j=5$ | 7.7047400E+1 | -5.7662470E+2 | 8.9321000E+1 | 2.3754970E+2 | 2.1217933E+3 |
| $j=6$ | -2.3871800E+1 | 4.3277900E+2 | 5.8258400E+1 | -3.0600000E+1 | -5.5166700E+1 |
| $j=7$ | 0.0000000E+0 | -1.6053650E+2 | -4.6080700E+1 | -2.7617000E+1 | -3.4943210E+2 |
| $j=8$ | 1.9970000E-1 | 2.3392500E+1 | 8.7301000E+0 | 8.8453000E+0 | 9.2205900E+1 |

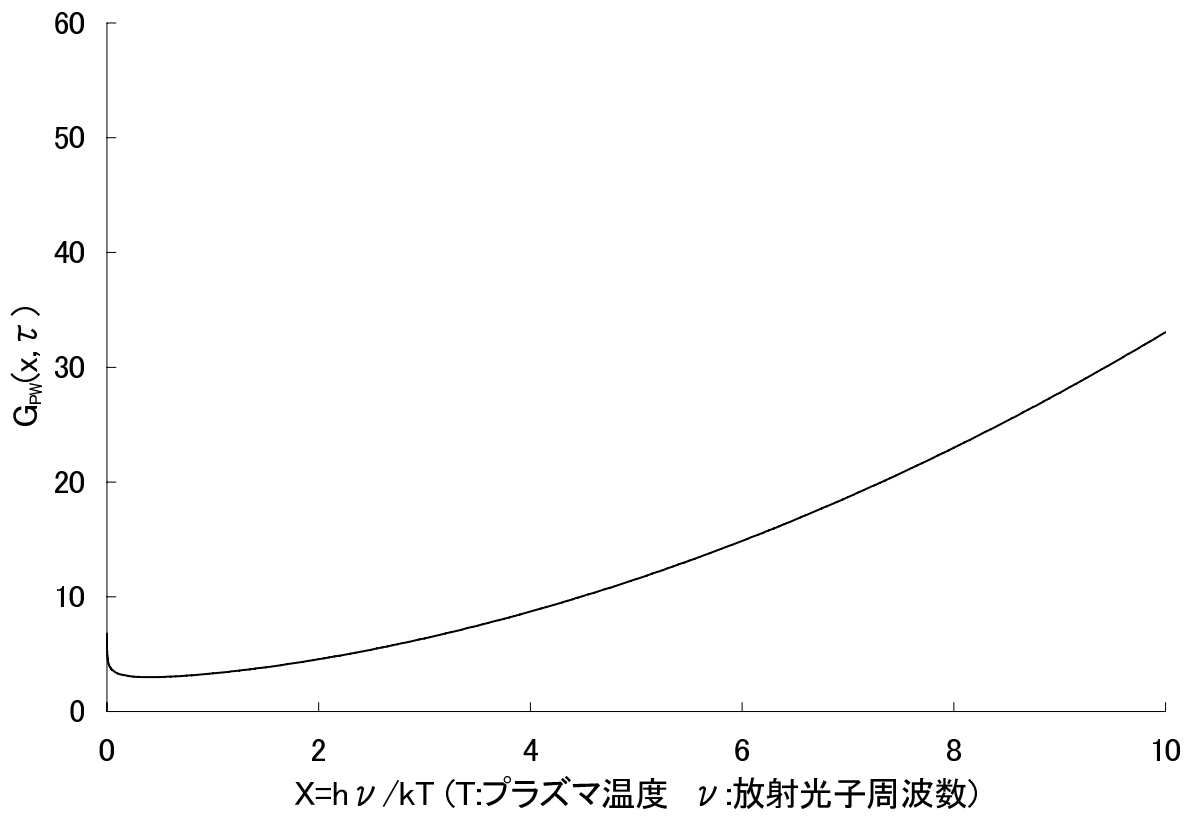


図 3.46: 相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR Fitting 計算 $k_B T = 500\text{keV}$

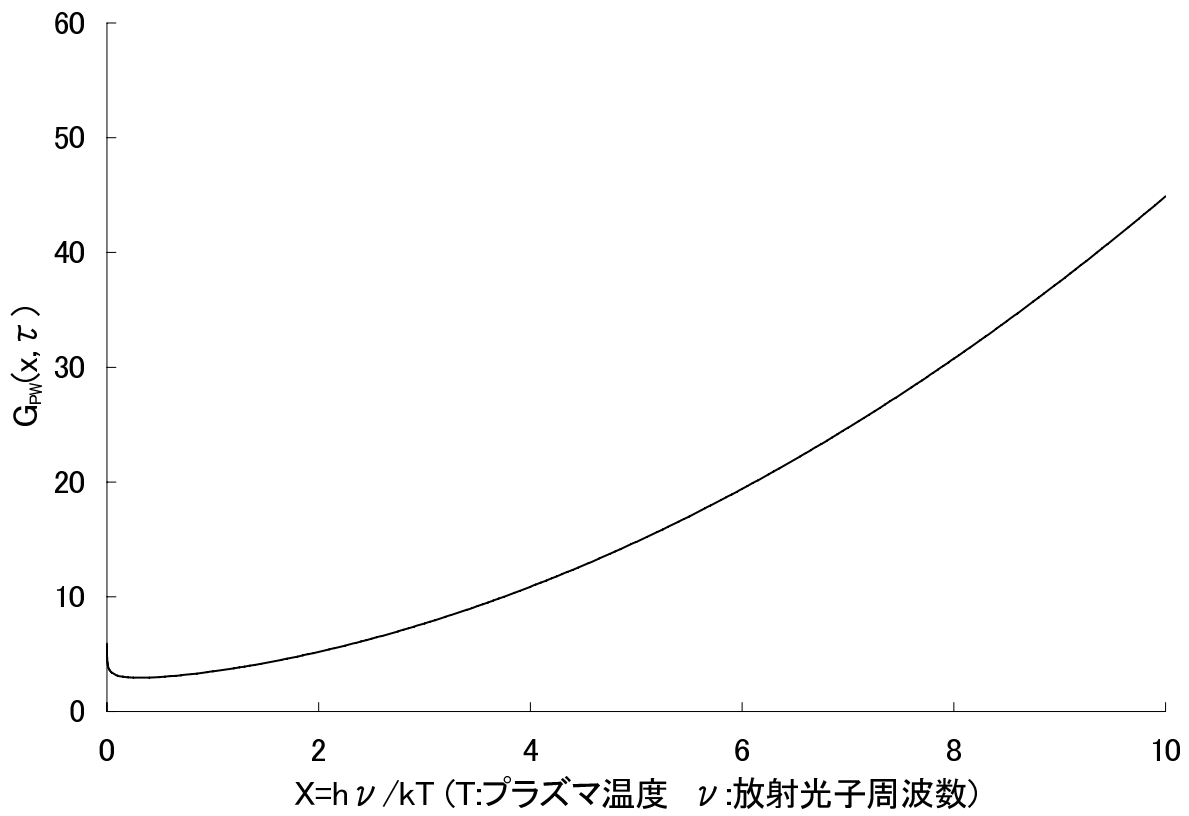


図 3.47: 相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR Fitting 計算 $k_B T = 1\text{MeV}$

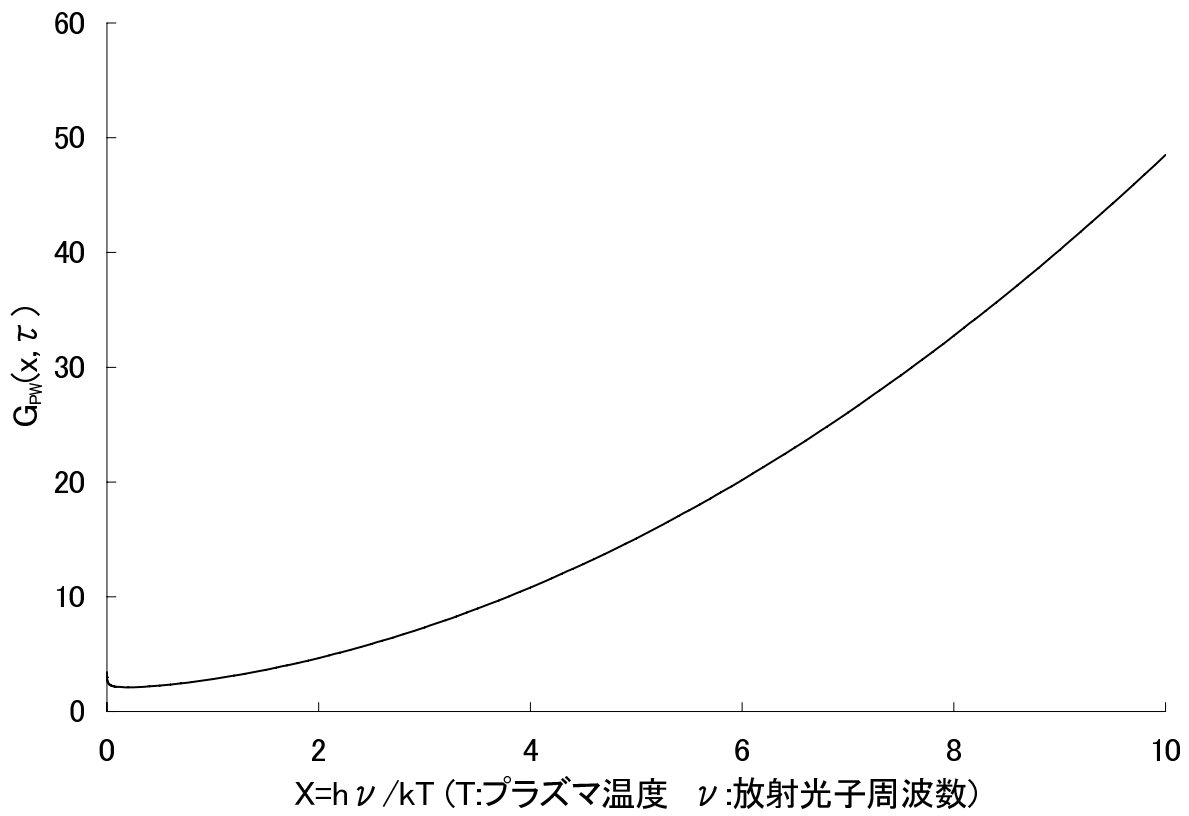


図 3.48: 相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR Fitting 計算 $k_B T = 5\text{MeV}$

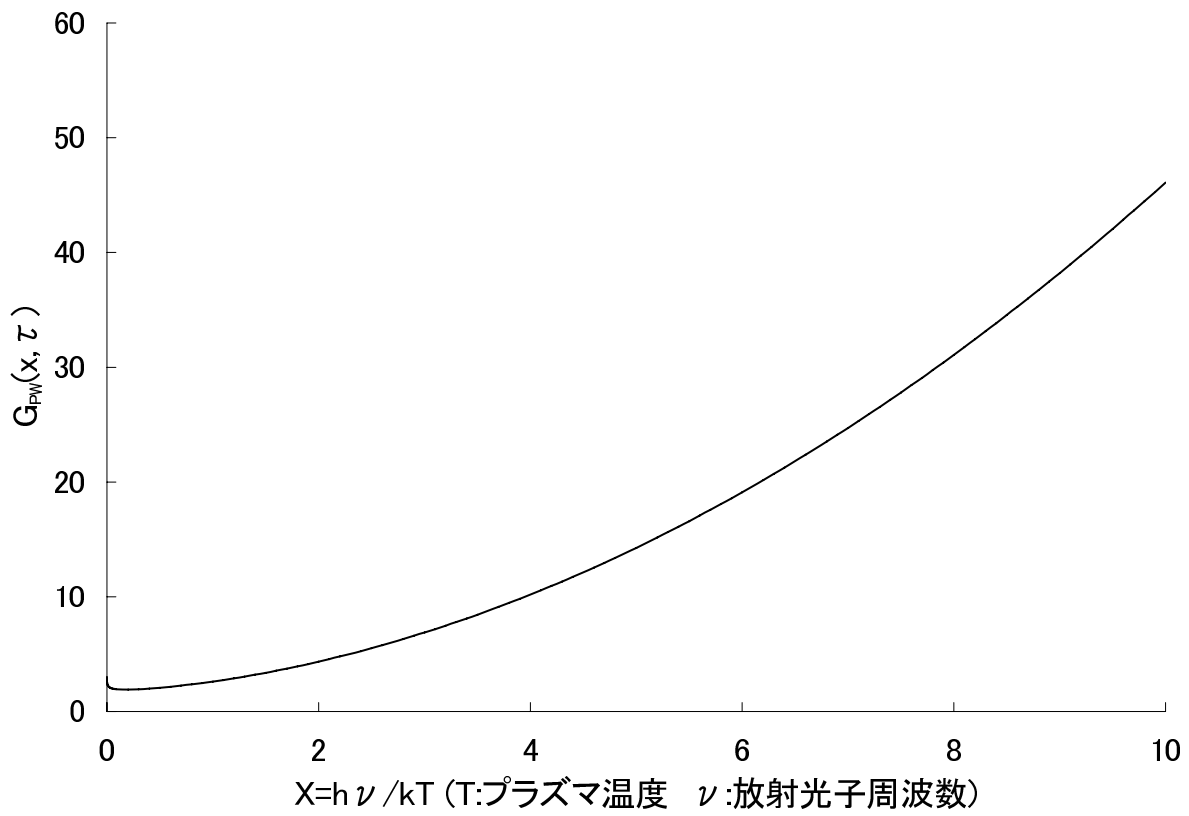


図 3.49: 相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR Fitting 計算 $k_B T = 7\text{MeV}$

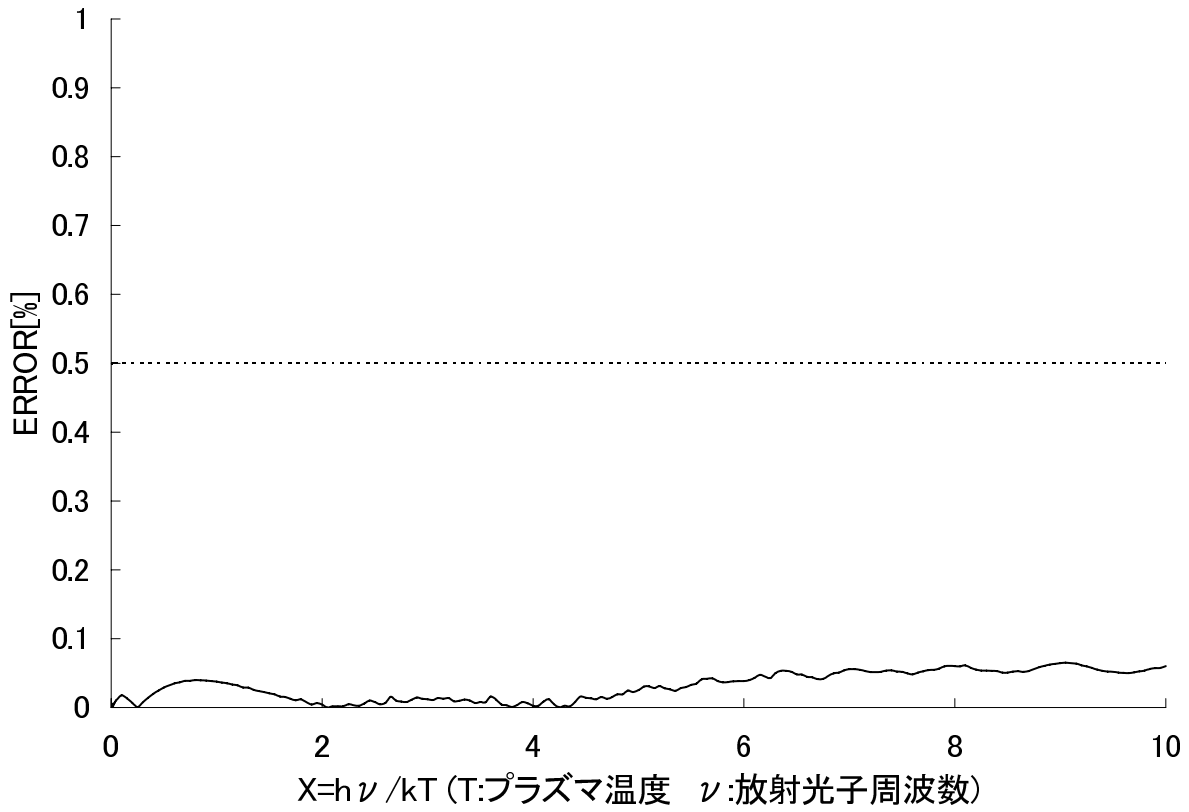


図 3.50: 相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR Fitting 誤差 $k_B T = 500\text{keV}$

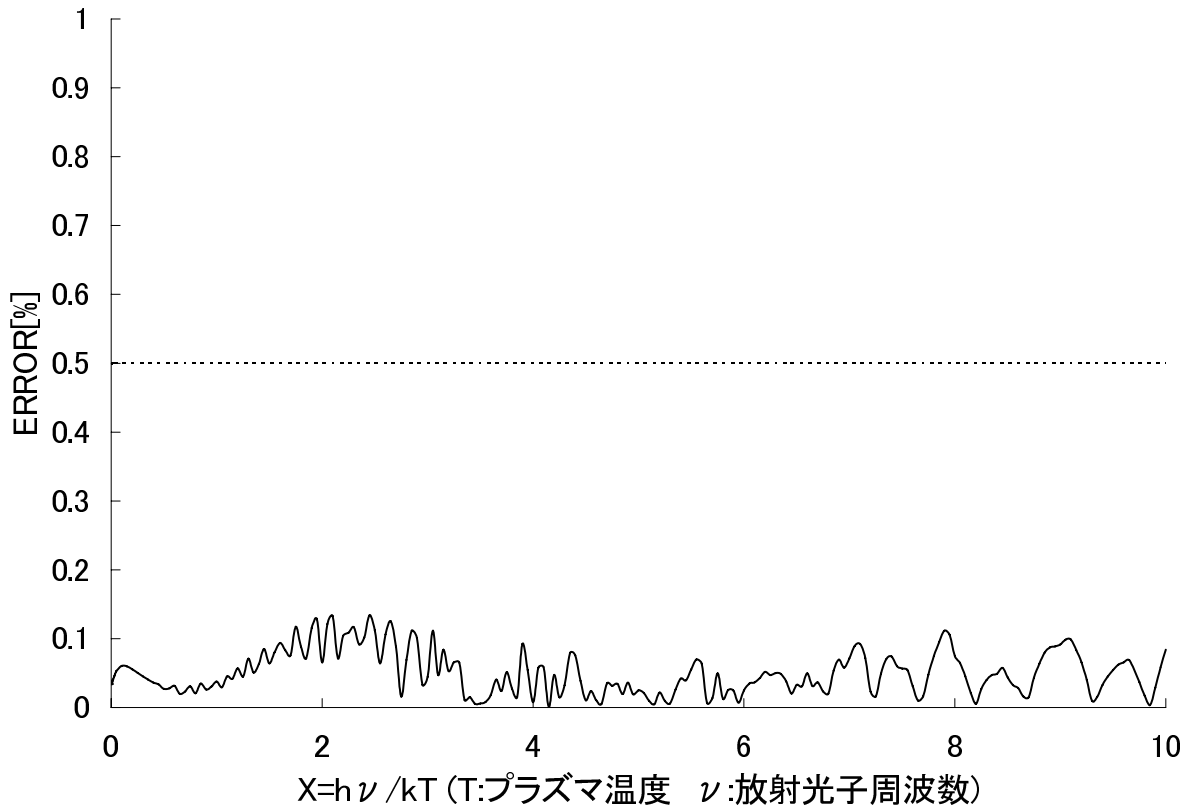


図 3.51: 相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR Fitting 誤差 $k_B T = 1\text{MeV}$

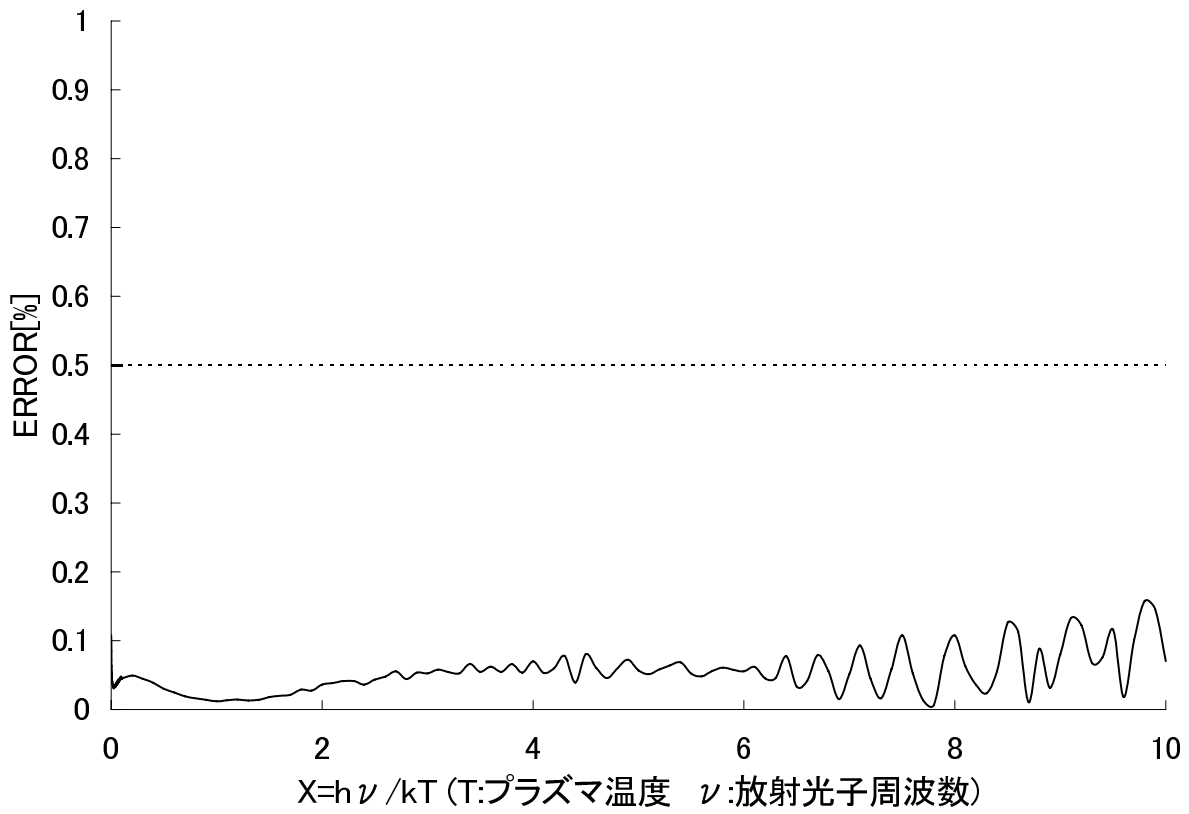


図 3.52: 相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR Fitting 誤差 $k_B T = 5\text{MeV}$

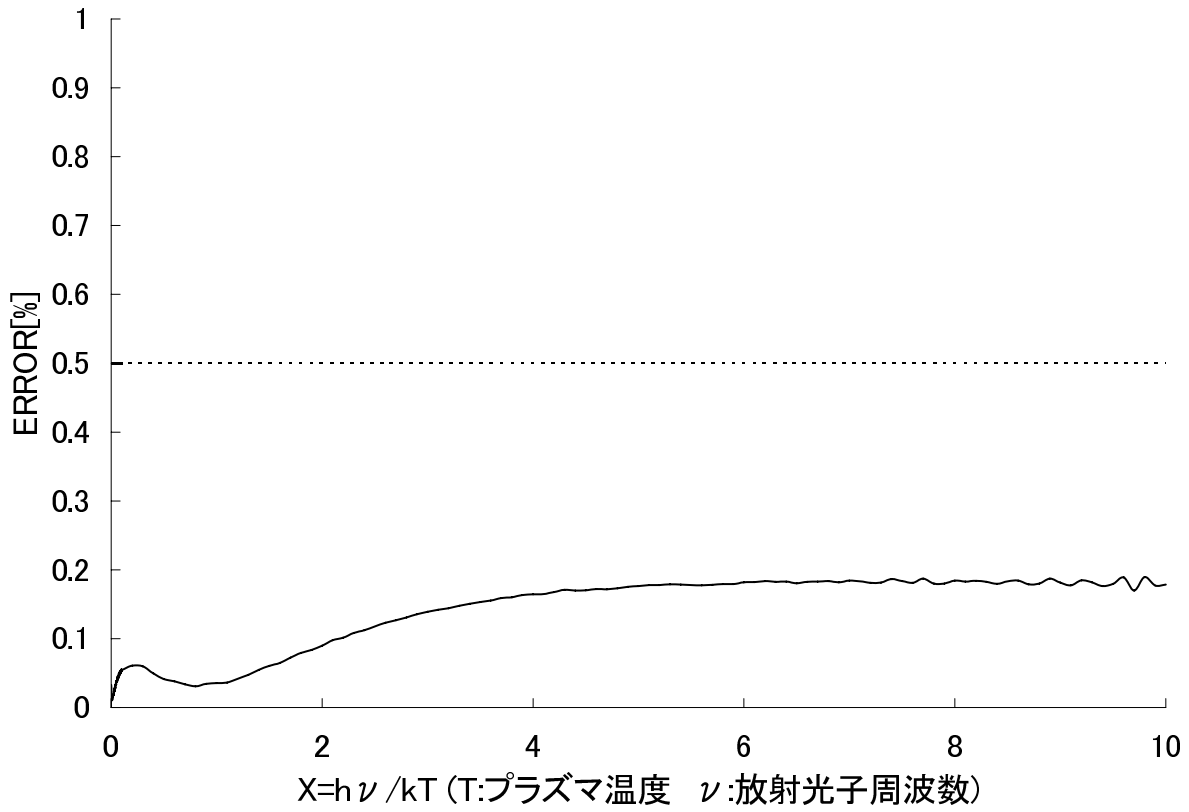


図 3.53: 相対論的電子 - 電子熱制動放射 PPR Fitting 誤差 $k_B T = 7\text{MeV}$

•Emissivity

Emissivity $W_{ee}^{II}(\tau)$ については、同様にして、

$$G^{FIT}(x, \tau) = G_{PW}(x, \tau)$$

より

$$\int_0^\infty dx e^{-x} G^{FIT}(x, \tau) = A_0(\tau) + A_1(\tau) + 2A_2(\tau) + B_0(\tau) \quad (3.73)$$

となる。よって、

$$W_{ee}^{II}(\tau) = m_e c^2 n_e^2 \sigma_T c \alpha \tau^{3/2} G^{II}(\tau), \quad (3.74)$$

$$G^{II}(\tau) = A_0^{II}(\tau) + A_1^{II}(\tau) + 2A_2^{II}(\tau) + B_0^{II}(\tau) + \frac{1}{2}B_1^{II}(\tau). \quad (3.75)$$

Fitting 領域は $300\text{keV} \leq k_B T \leq 7\text{MeV}$ である。また、最大誤差は 0.1% となった。

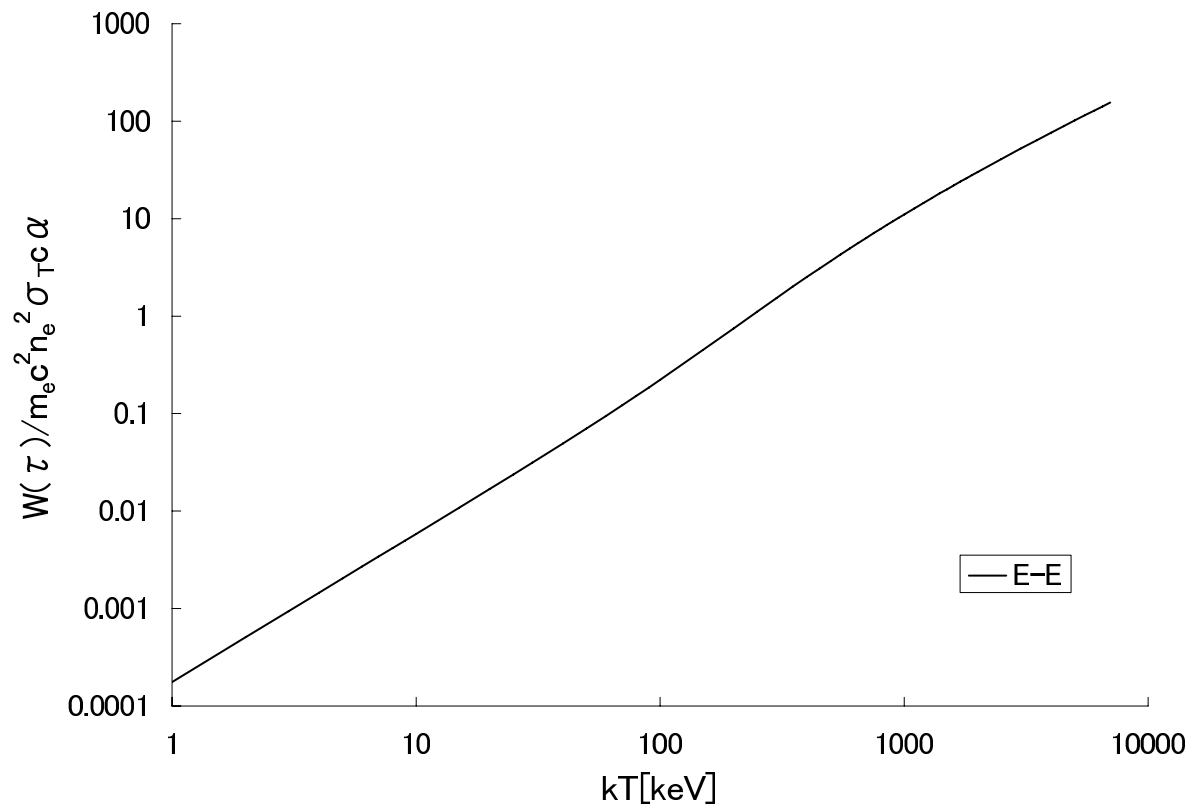


图 3.54: 相对論的電子 - 電子熱制動放射 Emissivity Fitting 計算

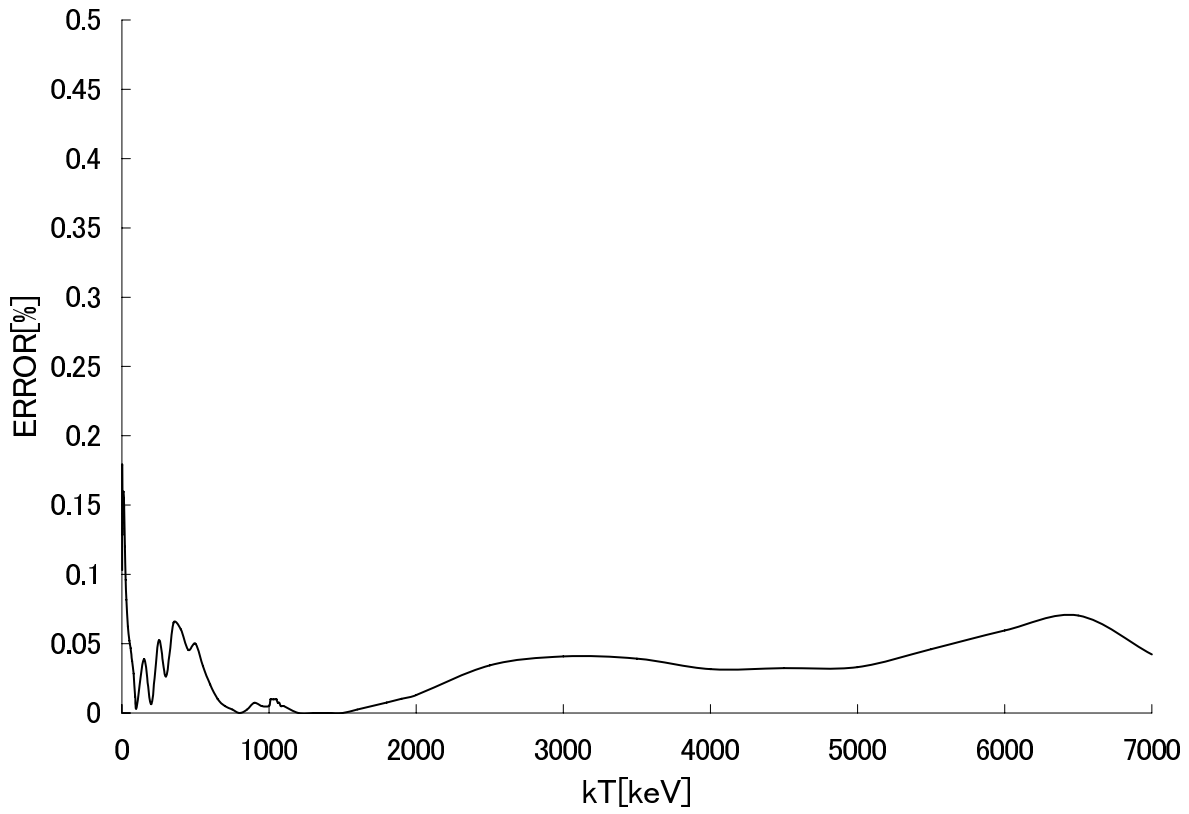


圖 3.55: 相對論的電子 - 電子熱制動放射 Emissivity Fitting 誤差

第4章 まとめ

4.1 総括

今回、電子 - 電子熱制動放射における PPR, と Emissivity の計算を行った。この計算を行うにあたって、Haug(1975a) の散乱断面積を用いた。704 項にもなる複雑な式を解析的に積分されたこの研究によって、計算時間の大幅な短縮を行う事ができた。それを受けて Stepney & Guilbert(1983) の研究では PPR, Emissivity の計算が行われた。本研究はこれらの研究を参考に、より高精度・広範囲な Fitting を行うものであった。例えば、クーロン相互作用を考慮する為に Elwert Factor を導入する等を行った。その実現の為に、50 点からなる、多くのプラズマ温度で計算を行い Fitting の材料とした。光子の無次元エネルギーに関しては、非相対論 Fitting との接続を考え、 $10^{-4} \leq x \leq 10$ という範囲で Fitting を行った。また、Fitting 関数を決めるにあたって、超相対論近似計算との接続を考え、 E_i 関数を用いた形を取った。

$$G_{PW}(x, \tau) = \sum_{i=0}^2 A_i(\tau)x^i - e^x E_i(-x) \sum_{i=0}^1 B_i(\tau)x^i \quad (4.1)$$

x の小さいところでは E_i 関数の項が効き、 x の大きいところでは、 x のべき乗の項が効いてくる。このような関数形を用いる事で、高精度・広範囲での Fitting を行う事が出来た。また、非相対論領域では、Maxon & Corman(1967), Maxon & Corman(1972) によって散乱断面積と Gaunt Factor の計算が行われた。そして、Itoh, Kawana, & Nozawa (2002a) ではそれらの再計算と Fitting 関数の導出が行われた。超相対論領域では Alexanian(1968) によって超相対論近似計算が行われている。これらの研究と合わせる事で、 $50\text{eV} \leq k_B T$, $10^{-4} \leq x \leq 10$ の範囲で解析的 Fitting 式による計算・超相対論近似計算が行えるようになった。超相対論領域において、 x の範囲は制限されていない。今回の研究を発表した論文では、それらをまとめて記述している。実際に観測されている銀河団温度は $5 \sim 15\text{keV}$ 、ブラックホール近傍プラズマ温度は数 MeV である事から、この Fitting 計算を用いて観測データ解析やシミュレーションが行える事がわかる。特に、実際に積分計算を行って PPR と Emissivity を計算する為には、Haug(1975a) の散乱断面積積分を用いても平均で 2 日程度、数 MeV オーダーの高温領域では計算精度の観点から、積分の分点数を多く取る必要があり、4 日程度掛かる。その為、即時計算を行うという事には至らず、今回の Fitting 式のような解析的数値計算を行う必要がある。これらを考慮すると、Fitting 計算によって即時計算が行える事のメリットは非常に大きなものとなっている。

一方、電子 - イオン熱制動放射については、Nozawa, Itoh, & Kohyama(1998) によって研究が行われた。これは、相対論領域において Elwert 近似・Born 近似計算、非相対論領域において厳密・Elwert 近似・Born 近似計算を行ったものである。この研究によって電子 - イオン熱制動放射の研究は大きく発展した。また、超相対論領域では Quigg(1968) によって超相対論近似計算が行われている。これらの計算はほとんど即時計算によって積分を実行できる。それは、電子 - 電子散乱の場合は quadpole 計算であり、電子 - イオン散乱の場合 diepole 計算であるという事が理由として挙げられる。

更に、今後の制動放射研究の課題であるが、電子 - 陽電子熱制動放射についても計算を行う必要がある。電子 - 陽電子熱制動放射は、その過程だけ見れば、電子 - 電子・電子 - イオン熱制動放射よりも大きな寄与をもたらしている。但し、陽電子自体の密度が高くないので、Emissivityとしては大きな寄与を持たない。また、電子 - 陽電子散乱は quadpole 計算であり、電子 - 電子の場合と同様に即時計算を行う事ができない。その為、電子 - 陽電子熱制動放射についてもより深く研究を行う必要がある。その手がかりとして、この分野でも Haug(1985) によって同様の散乱断面積解析的積分計算が行われている。また、その後の Haug(1985, 1987) の論文では PPR, Emissivity の計算とその Fitting が行われている。しかし、電子 - 電子熱制動放射の場合と同様に、連続的な Fitting 関数になっておらず、プラズマ温度を 11 点選んだ Fitting 関数となっている。その為、今後の研究においてこの領域での高精度計算と、Fitting 関数の導出を行う必要がある。

4.2 Fitting 比較

今回の Fitting 計算は $1\text{keV} \leq k_B T \leq 7\text{MeV}$ の範囲で行った。この計算を行う事で、以前に行われた非相対論領域の研究 (Itoh, Kawana, & Nozawa 2002a)・超相対論領域の研究 (Alexanian 1968) の間の領域を精度良く計算できるようになった。また、Stepney & Guilbert(1983) は断片的な温度で Fitting を行っており、精度も数%以内というものであったが、今回の Fitting では範囲内全ての温度を解析的 Fitting 式により連続的に、且つ広範囲に計算する事が出来るようになった。また Fitting 精度も 0.5%以内となっている。

4.3 応用例

今回の Fitting 計算の応用例として電子 - 電子, 電子 - イオン Emissivity の支配温度領域を比較した。電子 - イオン熱制動放射 Emissivity を計算する為に、以下より与えられる Stickforth(1961) の Fitting 式 (精度 : 0.5%以下) を用いた。

$$W_{ei}(\tau) = \frac{2}{3} n_e n_i \Phi_0 m c^3 \frac{J_1(\tau) + J_2(\tau)}{\tau e^{\frac{1}{\tau}} K_2\left(\frac{1}{\tau}\right)} \quad (4.2)$$

但し、

$$J_1(\tau) = 8 \left[2\tau^2 + 5\tau^3 + 6.8922\tau^4 + 18.396\tau^5 - 5.7552\tau^6 - 119.35\tau^7 - e^{\frac{1}{\tau}} (6.2015\tau + 12.278\tau^2 + 15.158\tau^3 + 2.5184\tau^4 - 47.036\tau^5 - 125.11\tau^6 - 119.35\tau^7) \right] \quad (4.3)$$

$$J_2(\tau) = e^{-\frac{1}{\tau}} (49.382\tau + 98.653\tau^2 + 135.23\tau^3 + 103.91\tau^4) - 36\tau^4 e^{\frac{1}{\tau}} E_i\left(-\frac{2}{\tau}\right) \quad (4.4)$$

である。ここで、

$$\Phi_0 \equiv \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \quad (4.5)$$

より、係数については

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{3}n_en_i\Phi_0mc^3 &= \frac{2}{3}n_en_i\frac{e^2}{\hbar c}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 mc^3 \\
 &= \frac{3}{8\pi}n_en_i\frac{e^2}{\hbar c}mc^3\sigma_T \\
 &= \frac{3}{2}n_en_i\alpha mc^3\sigma_T
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

として与えられる。この時、

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \tag{4.7}$$

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \tag{4.8}$$

を用いた。以上より、

$$W_{ei}(\tau) = mc^3n_en_i\alpha\sigma_T\tau^{\frac{3}{2}}\frac{J_1(\tau) + J_2(\tau)}{4\pi\tau^{\frac{5}{2}}e^{\frac{1}{\tau}}K_2\left(\frac{1}{\tau}\right)} \tag{4.9}$$

であり、

$$G_{ei}(\tau) = \frac{J_1(\tau) + J_2(\tau)}{4\pi\tau^{\frac{5}{2}}e^{\frac{1}{\tau}}K_2\left(\frac{1}{\tau}\right)} \tag{4.10}$$

を得る。この Fitting 式を用いて Emissivity の比較を行った。

プラズマ温度が高温になるにつれて電子 - 電子の寄与が大きくなる事がわかる。また、今回の計算によって、283keV で電子 - 電子、電子 - イオンの効果が入れ替わる事がわかった。Haug(1975b) によって行われた近似計算では、264keV であるという結果が報告されている。この事からも、今回の研究がより高精度であると言える。

4.4 今後に向けて

今回の研究では PPR, Emissivity の数値積分とその Fitting 式の導出を行った。これは、今までに行われてきた電子 - 電子熱制動放射研究の集大成であり、この研究分野において大きな飛躍を遂げた事になる。特に、 $1\text{keV} \leq k_B T \leq 7\text{MeV}$, $10^{-4} \leq x \leq 10$ 範囲での精度 0.5% 以下の Fitting 関数の導出については、過去に行われた非相対論・超相対論を用いた電子 - 電子熱制動放射研究をつなぐものである。それらをまとめる事によって、 $50\text{eV} \leq k_B T$ の範囲で熱制動放射 PPR, Emissivity を近似的・解析的に 1% 以内の精度で計算が可能となった。5 重積分・6 重積分による PPR, Emissivity の計算には 1 つの温度を求めるだけでも、莫大な時間が掛かる事を考慮すると、この Fitting 計算は大変有用である。また、PPR, Emissivity の数値積分についてもこれまでとはとびとびの温度でしか行われていなかったが、今回の研究では $1\text{keV} \leq k_B T \leq 7\text{MeV}$, $10^{-4} \leq x \leq 10$ という範囲で計算を行う事が出来た。これにより非相対論・超相対論領域との接続が可能になったと言える。今後、X 線観測衛星 Chandra、XMM-Newton、Suzaku や今後新たに開発される X 線観測衛星によって得られた観測データ解析やその他の分野において、今回の Fitting 関数を用いた高精度・広範囲が応用されれば幸いである。

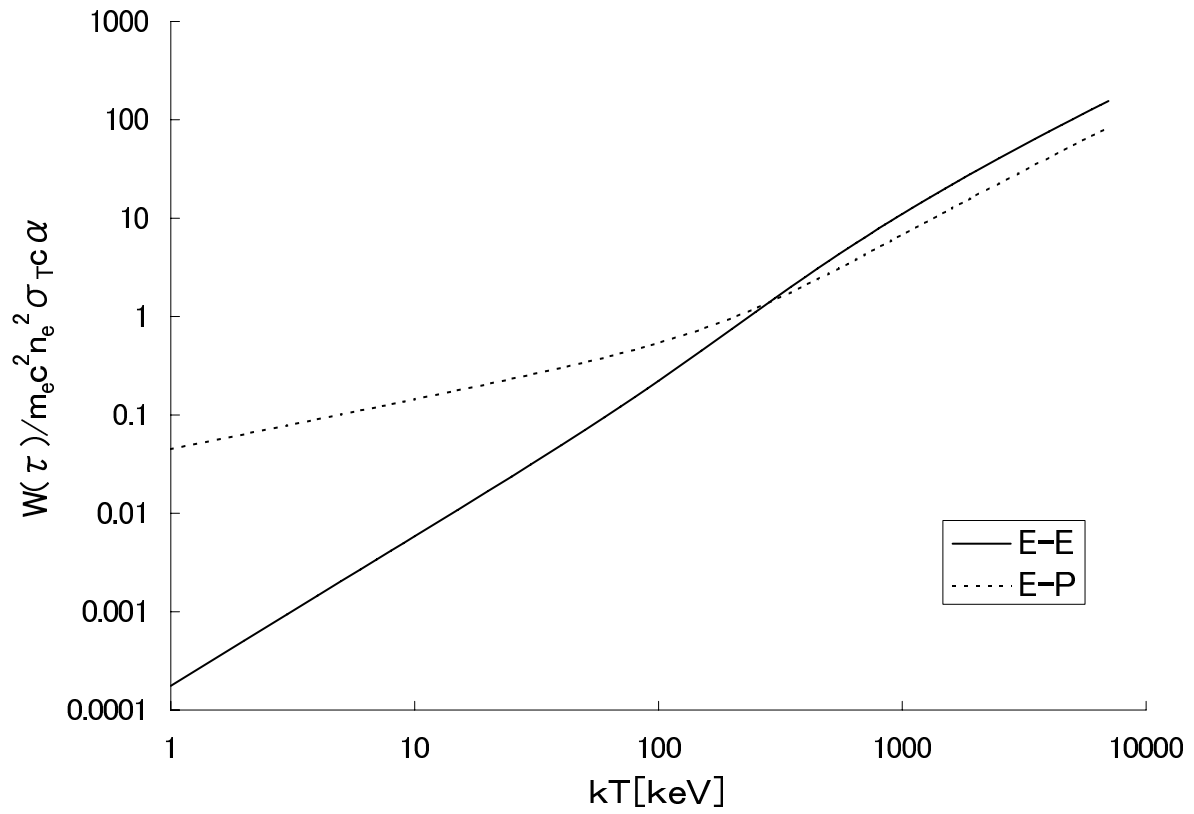


図 4.1: 電子 - 電子、電子 - イオン熱制動放射 Emissivity の比較

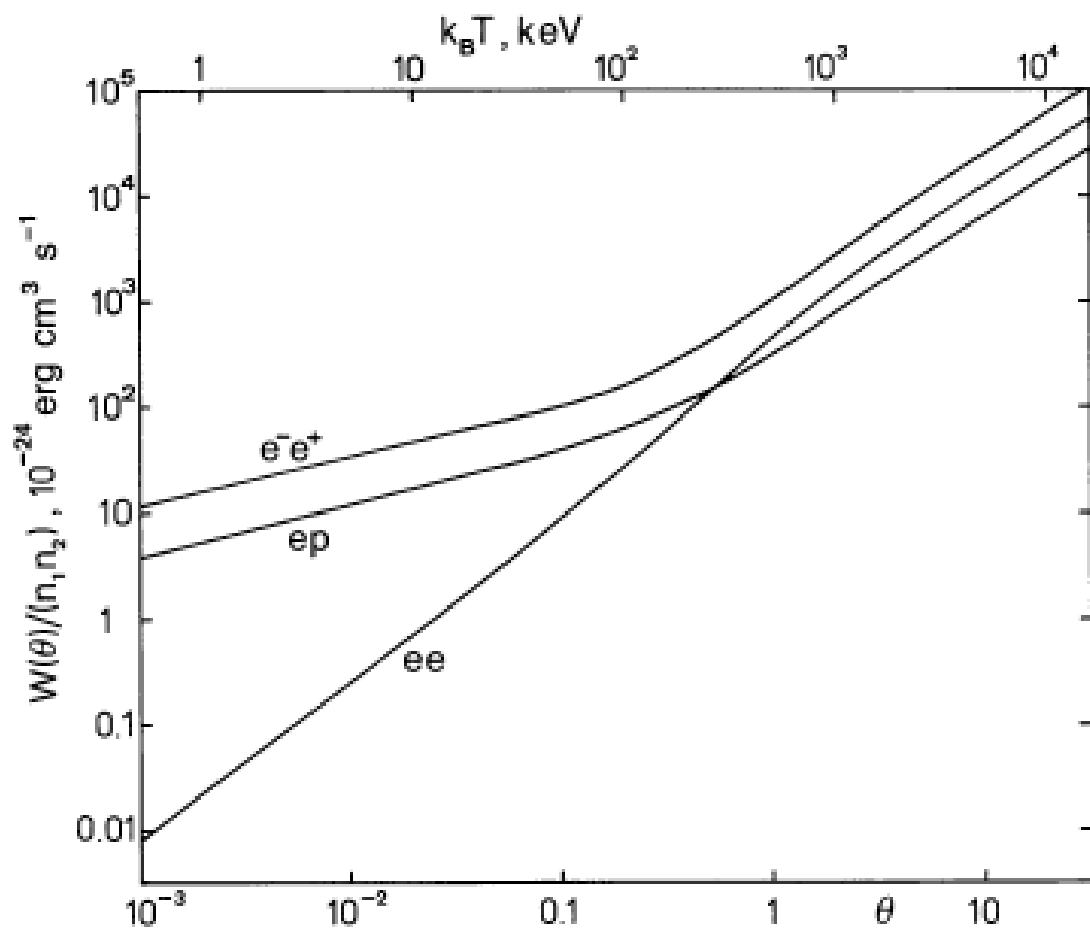


図 4.2: 電子 - 電子、電子 - イオン、電子 - 陽電子熱制動放射 Emissivity の比較 (Haug 1985 より参照)

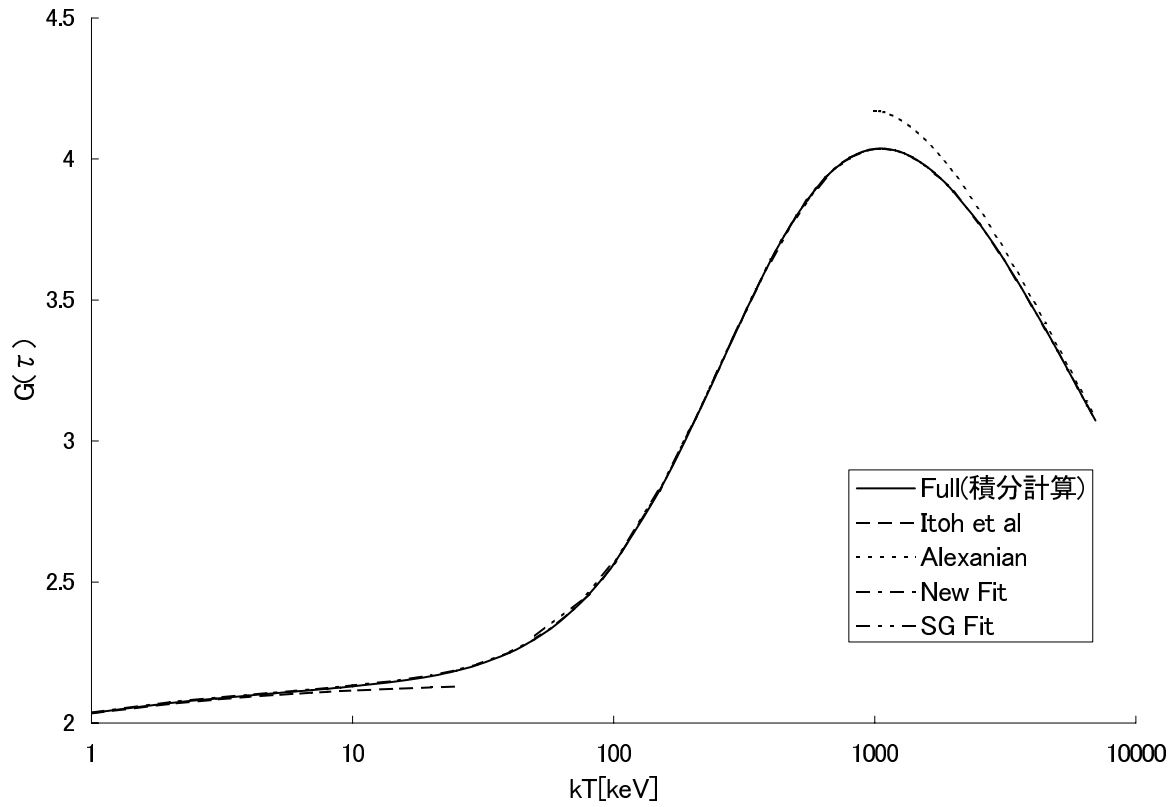


図 4.3: 電子 - 電子熱制動放射 Emissivity 積分計算・非相対論領域・超相対論領域・今回の Fitting・Stepney & Guilbert による Fitting の比較

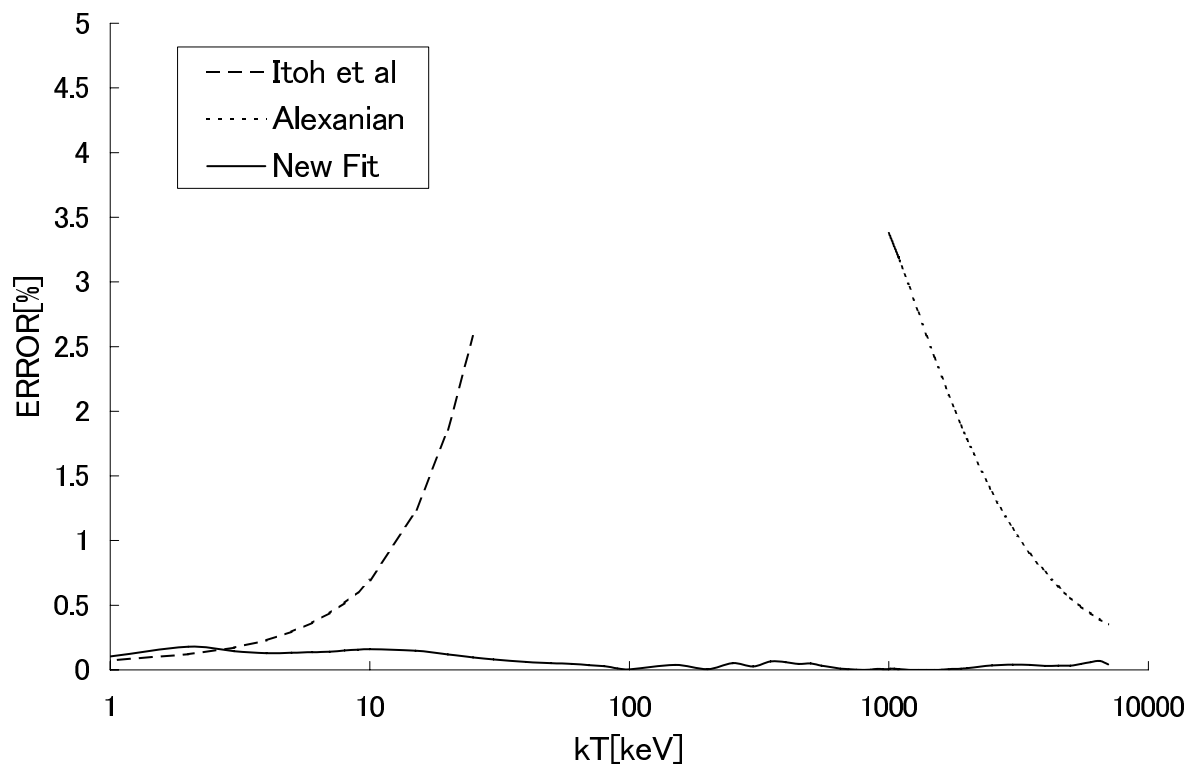


図 4.4: 電子 - 電子熱制動放射 Emissivity 積分計算と非相対論領域・超相対論領域・今回の Fitting の誤差比較

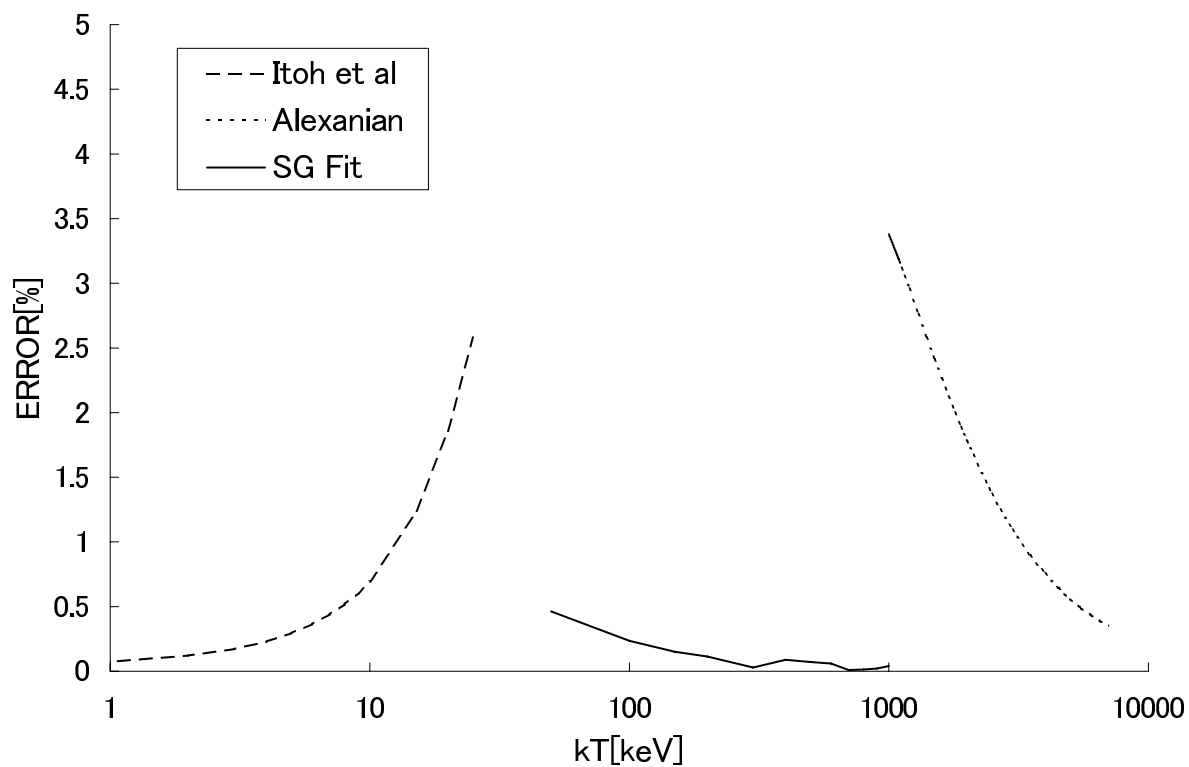


図 4.5: 電子 - 電子、電子 - イオン熱制動放射 Emissivity 積分計算と非相対論領域・超相対論領域・Stepney & Guilbert による Fitting の誤差比較

研究実績

発表論文

"Analytic fitting formulae for relativistic electron-electron thermal bremsstrahlung"

S. Nozawa, K. Takahashi, Y. Kohyama and N. Itoh

Astronomy and Astrophysics, submitted

謝 辞

本研究を行うにあたり、多くの方に御支援、御助力頂いた事をこの場を借りてお礼申し上げます。特に、伊藤直紀先生には研究室配属当初から多岐に渡って厳しくも暖かい御指導を頂き、深く感謝しております。毎日、朝に行われるミーティングでは、研究者としての心構えだけでなく、日常生活の細部に至るまでキメ細かい指導を頂きました。この事は今後の実生活の至る所で役立てていきたいと考えています。また、毎週のゼミでは、発表内容はもちろんの事ながら、発表態度・発表姿勢についても多くの事を御指導いただきました。普通の日常生活の中において、自分では気付かない事を御指摘頂き大変貴重な時間を過ごす事が出来ました。そして、学部生時代に伊藤直紀先生や他の研究生と共に旅行した際には、宇宙物理学についての幅広い教養や、多くの思い出を作る事が出来ました。テニス等の運動にも御一緒でき、強い研究姿勢には基礎体力が欠かせないという事を実感しました。更に、普段目にする事の少ない観測機器についてのセッションの場を与えて頂きました。そういった社会に対する多くの教養と、研究生活を送る上での厳しい姿勢を教えて頂きました事に厚く御礼を申し上げます。また、共同研究者である野澤智先生には研究方針についての多くの議論をさせて頂きました。研究内容で行き詰った際には、多方面からの情報やアドバイスをして頂き、それらの言葉によって、今回の研究を行えたと言っても過言ではないと考えています。大変お忙しい中、毎週ゼミに参加して頂き、多くの助言によって研究活動を御支援頂きました。特に、Fittingを行う上で、関数形やその係数へのアドバイスを頂き、当初は非常に長いFitting関数を考えていたのですが、よりシンプルで且つ高精度な関数形と一緒に議論して頂きました。この事によって、私は諦めない事の重要性を再確認する事が出来ました。これらの研究に対する姿勢と、多方面からの情報を頂き、深く感謝しております。そして、神山泰治先生には数値計算における非常に専門的な議論や、物理を見るという事を教えていただきました。数値計算も重要ではあるが、その裏に隠れた物理を見る事が宇宙物理学の研究生として有益であるという事を学ぶ事が出来ました。また、計算を行う上での多くの助言と鋭い御指摘によって、自分の甘さに気づく事が出来ました。数値計算については、膨大な知識とプログラミングへの熱意によって、私の研究生活を支えて頂きました。こういった研究姿勢そして、数値計算への深い知識を御教授頂いた事、深く感謝しております。これらの経験と知識は、今後社会生活を営む上で非常に有益なものになると確信しております。そのような研究の場と、機会、そして多くの御助言を頂いた事にこの場を借りて厚い御礼を申し上げます。また、物理学の面白さを教えて頂いた諸先生方、学生・研究生活を共にした仲間達にも多くの御支援を頂きました。非常に多くの方に支えられ、研究活動を行えた事に深く感謝すると共に、恩返しとして、今後私もそういった場を作る事が出来るよう、精進して参りたいと考えております。一方、これまでの生活を支えて頂いた両親にも深く感謝いたします。

参考文献

- [1] 伊藤直紀「宇宙の時、人間の時」朝日選書 643 朝日新聞社 (2000)
- [2] Alexanian, M. 1968, *Phys. Rev.*, 165, 253
- [3] D. Elbaz, M. Arnaud, H. Bohringer, 1995, *Astron. Astrophys.*, 293, 337-346
- [4] D. Gruber, Y. Rephaeli, 2002, 877-882
- [5] Elwert, G. 1939, *Ann. Phys.*, 34, 178
- [6] F. Govoni, M. Markevitch, A. Vikhlinin, L. VanSpeybroeck, L. Feretti, G. Giovannini, 2004, *Astrophys.J.*, 605, 695-708
- [7] Haug, E. 1987, *Astron. Astrophys.* 178, 292-293
- [8] Haug, E. 1985, *Astron. Astrophys.* 148, 386-390
- [9] Haug, E. 1985, *Phys. Rev. D* 31, 2120
- [10] Haug, E. 1975a, *Z. Naturforsch.*, 30a, 1099
- [11] Haug, E. 1975b, *Z. Naturforsch.*, 30a, 1546
- [12] Itoh, N., Kawana, Y., & Nozawa, S. 2002a, *IL Nuovo Cimento*, 117B, 359
- [13] Itoh, N., Sakamoto, T., Kusano, S., Kawana, Y., & Nozawa, S. 2002b, *A&A*, 382, 722
- [14] Itoh, N., Sakamoto, T., Kusano, S., Nozawa, S., & Kohyama, Y. 2000, *ApJS*, 128, 125
- [15] J. P. Hughes, Y. Tanaka, 1992, *Astrophys.J.*, 398, 62-68
- [16] Maxon, M. S., 1972, *Phys. Rev.*, A5, 1630
- [17] Maxon, M. S., & Corman, E. G. 1971 *Phys. Rev. A* 1, 163
- [18] Maxon, M. S., & Corman, E. G. 1967, *Phys. Rev.*, 163, 156
- [19] M. E. Machacek, M. W. Bautz, C. Canizares, 2002, *Astrophys.J.*, 567, 188-201
- [20] M. J. Henriksen, 1993, *Astrophys. J.*, 414, 5-8
- [21] M. Markevitch, R. Mushotzky, H. Inoue, K. Yamashita, A. Furuzawa, Y. Tawara, 1996, *Astrophys.J.*, 456, 437-444
- [22] Nozawa, S., Itoh, N., & Kohyama, Y. 1998, *ApJ*, 507, 530
- [23] Stepney, S., & Guilbert, P. W. 1983, *MNRAS*, 204, 1269
- [24] Stickforth, J. 1961, *Z. Physik*, 164, 1
- [25] Quigg, C. 1968, *ApJ*, 151, 1187

付録A Trace計算

ファイマン図に従って計算を行っていく。放射過程 (a)-(h) までを計算すると以下のようになる。

$$T_a = ie^3 \sqrt{\frac{m}{E_1 V}} \sqrt{\frac{m}{E_2 V}} \sqrt{\frac{m}{E_3 V}} \sqrt{\frac{m}{E_4 V}} \sqrt{\frac{1}{2k_0 V}} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \\ \times [\bar{u}(p_3) \{ \not{\epsilon} \frac{1}{\not{p}_3 + \not{k} - m} \gamma^\mu \} u(p_1)] \frac{g_{\mu\nu}}{(p_4 - p_2)^2} [\bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2)] \quad (\text{A.1})$$

$$T_b = ie^3 \sqrt{\frac{m}{E_1 V}} \sqrt{\frac{m}{E_2 V}} \sqrt{\frac{m}{E_3 V}} \sqrt{\frac{m}{E_4 V}} \sqrt{\frac{1}{2k_0 V}} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \\ \times [\bar{u}(p_3) \{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k} - m} \not{\epsilon} \} u(p_1)] \frac{g_{\mu\nu}}{(p_4 - p_2)^2} [\bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2)] \quad (\text{A.2})$$

$$T_c = ie^3 \sqrt{\frac{m}{E_1 V}} \sqrt{\frac{m}{E_2 V}} \sqrt{\frac{m}{E_3 V}} \sqrt{\frac{m}{E_4 V}} \sqrt{\frac{1}{2k_0 V}} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \\ \times [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] \frac{g_{\mu\nu}}{(p_3 - p_1)^2} [\bar{u}(p_4) \{ \not{\epsilon} \frac{1}{\not{p}_4 + \not{k} - m} \gamma^\mu \} u(p_2)] \quad (\text{A.3})$$

$$T_d = ie^3 \sqrt{\frac{m}{E_1 V}} \sqrt{\frac{m}{E_2 V}} \sqrt{\frac{m}{E_3 V}} \sqrt{\frac{m}{E_4 V}} \sqrt{\frac{1}{2k_0 V}} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \\ \times [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] \frac{g_{\mu\nu}}{(p_3 - p_1)^2} [\bar{u}(p_4) \{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_2 - \not{k} - m} \not{\epsilon} \} u(p_2)] \quad (\text{A.4})$$

$$T_e = -ie^3 \sqrt{\frac{m}{E_1 V}} \sqrt{\frac{m}{E_2 V}} \sqrt{\frac{m}{E_3 V}} \sqrt{\frac{m}{E_4 V}} \sqrt{\frac{1}{2k_0 V}} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \\ \times [\bar{u}(p_3) \{ \not{\epsilon} \frac{1}{\not{p}_3 + \not{k} - m} \gamma^\mu \} u(p_2)] \frac{g_{\mu\nu}}{(p_4 - p_1)^2} [\bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_1)] \quad (\text{A.5})$$

$$T_f = -ie^3 \sqrt{\frac{m}{E_1 V}} \sqrt{\frac{m}{E_2 V}} \sqrt{\frac{m}{E_3 V}} \sqrt{\frac{m}{E_4 V}} \sqrt{\frac{1}{2k_0 V}} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \\ \times [\bar{u}(p_3) \{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_2 - \not{k} - m} \not{\epsilon} \} u(p_2)] \frac{g_{\mu\nu}}{(p_4 - p_1)^2} [\bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_1)] \quad (\text{A.6})$$

$$T_g = -ie^3 \sqrt{\frac{m}{E_1 V}} \sqrt{\frac{m}{E_2 V}} \sqrt{\frac{m}{E_3 V}} \sqrt{\frac{m}{E_4 V}} \sqrt{\frac{1}{2k_0 V}} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \\ \times [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_2)] \frac{g_{\mu\nu}}{(p_3 - p_2)^2} [\bar{u}(p_4) \{ \not{\epsilon} \frac{1}{\not{p}_4 + \not{k} - m} \gamma^\mu \} u(p_1)] \quad (\text{A.7})$$

$$T_h = -ie^3 \sqrt{\frac{m}{E_1 V}} \sqrt{\frac{m}{E_2 V}} \sqrt{\frac{m}{E_3 V}} \sqrt{\frac{m}{E_4 V}} \sqrt{\frac{1}{2k_0 V}} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \\ \times [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_2)] \frac{g_{\mu\nu}}{(p_3 - p_2)^2} [\bar{u}(p_4) \{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k} - m} \not{\epsilon} \} u(p_1)] \quad (\text{A.8})$$

それぞれまとめて、

$$\begin{aligned}
T_1 &= T_a + T_b \\
&= ie^3 \sqrt{\frac{m}{E_1 V}} \sqrt{\frac{m}{E_2 V}} \sqrt{\frac{m}{E_3 V}} \sqrt{\frac{m}{E_4 V}} \sqrt{\frac{1}{2k_0 V}} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \\
&\quad \times [\bar{u}(p_3) \{ \not{\epsilon} \frac{1}{\not{p}_3 + \not{k} - m} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k} - m} \not{\epsilon} \} u(p_1)] \frac{g_{\mu\nu}}{(p_4 - p_2)^2} [\bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2)] \tag{A.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2 &= T_c + T_d \\
&= ie^3 \sqrt{\frac{m}{E_1 V}} \sqrt{\frac{m}{E_2 V}} \sqrt{\frac{m}{E_3 V}} \sqrt{\frac{m}{E_4 V}} \sqrt{\frac{1}{2k_0 V}} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \\
&\quad \times [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] \frac{g_{\mu\nu}}{(p_3 - p_1)^2} [\bar{u}(p_4) \{ \not{\epsilon} \frac{1}{\not{p}_4 + \not{k} - m} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_2 - \not{k} - m} \not{\epsilon} \} u(p_2)] \tag{A.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_3 &= T_e + T_f \\
&= -ie^3 \sqrt{\frac{m}{E_1 V}} \sqrt{\frac{m}{E_2 V}} \sqrt{\frac{m}{E_3 V}} \sqrt{\frac{m}{E_4 V}} \sqrt{\frac{1}{2k_0 V}} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \\
&\quad \times [\bar{u}(p_3) \{ \not{\epsilon} \frac{1}{\not{p}_3 + \not{k} - m} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_2 - \not{k} - m} \not{\epsilon} \} u(p_2)] \frac{g_{\mu\nu}}{(p_4 - p_1)^2} [\bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_1)] \tag{A.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_4 &= T_g + T_h \\
&= -ie^3 \sqrt{\frac{m}{E_1 V}} \sqrt{\frac{m}{E_2 V}} \sqrt{\frac{m}{E_3 V}} \sqrt{\frac{m}{E_4 V}} \sqrt{\frac{1}{2k_0 V}} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \\
&\quad \times [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_2)] \frac{g_{\mu\nu}}{(p_3 - p_2)^2} [\bar{u}(p_4) \{ \not{\epsilon} \frac{1}{\not{p}_4 + \not{k} - m} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k} - m} \not{\epsilon} \} u(p_1)] \tag{A.12}
\end{aligned}$$

を得る。更に、共役・転置を取り、

$$\begin{aligned}
T_1^\dagger &= T_a + T_b \\
&= -ie^3 \sqrt{\frac{m}{E_1 V}} \sqrt{\frac{m}{E_2 V}} \sqrt{\frac{m}{E_3 V}} \sqrt{\frac{m}{E_4 V}} \sqrt{\frac{1}{2k_0 V}} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \\
&\quad \times [\bar{u}(p_1) \{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_3 + \not{k} - m} \not{\epsilon}^* + \not{\epsilon}^* \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k} - m} \gamma^\mu \} u(p_3)] \\
&\quad \times \frac{g_{\mu\nu}}{(p_4 - p_2)^2} [\bar{u}(p_2) \gamma^\nu u(p_4)] \tag{A.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2^\dagger &= T_c + T_d \\
&= -ie^3 \sqrt{\frac{m}{E_1 V}} \sqrt{\frac{m}{E_2 V}} \sqrt{\frac{m}{E_3 V}} \sqrt{\frac{m}{E_4 V}} \sqrt{\frac{1}{2k_0 V}} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \\
&\quad \times [\bar{u}(p_1) \gamma^\nu u(p_3)] \\
&\quad \times \frac{g_{\mu\nu}}{(p_3 - p_1)^2} [\bar{u}(p_2) \{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_4 + \not{k} - m} \not{\epsilon}^* + \not{\epsilon}^* \frac{1}{\not{p}_2 - \not{k} - m} \gamma^\mu \} u(p_4)] \tag{A.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_3^\dagger &= T_e + T_f \\
&= ie^3 \sqrt{\frac{m}{E_1 V}} \sqrt{\frac{m}{E_2 V}} \sqrt{\frac{m}{E_3 V}} \sqrt{\frac{m}{E_4 V}} \sqrt{\frac{1}{2k_0 V}} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \\
&\quad \times [\bar{u}(p_2) \{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_3 + \not{k} - m} \not{\epsilon}^* + \not{\epsilon}^* \frac{1}{\not{p}_2 - \not{k} - m} \gamma^\mu \} u(p_3)] \\
&\quad \times \frac{g_{\mu\nu}}{(p_4 - p_1)^2} [\bar{u}(p_1) \gamma^\nu u(p_4)] \tag{A.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_4^\dagger &= T_g + T_h \\
&= ie^3 \sqrt{\frac{m}{E_1 V}} \sqrt{\frac{m}{E_2 V}} \sqrt{\frac{m}{E_3 V}} \sqrt{\frac{m}{E_4 V}} \sqrt{\frac{1}{2k_0 V}} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \\
&\quad \times [\bar{u}(p_2) \gamma^\nu u(p_3)] \\
&\quad \times \frac{g_{\mu\nu}}{(p_3 - p_2)^2} [\bar{u}(p_1) \{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_4 + \not{k} - m} \not{\epsilon}^* + \not{\epsilon}^* \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k} - m} \gamma^\mu \} u(p_4)] \tag{A.16}
\end{aligned}$$

とする。以上の結果を用いて、 $\sum_{spins} T^\dagger T$ を計算する。但し、

$$\begin{aligned}
\sum_{spins} u_\alpha(p) \bar{u}_\beta(p) &= (p + m)_{\alpha\beta} \\
\frac{1}{p_3 + k - m} &= \frac{p_3 + k + m}{(p_3 + k)^2 - m^2} \\
&= \frac{p_3 + k + m}{p_3^2 + k + 2p_3 \cdot k - m^2} \\
&= \frac{p_3 + k + m}{2p_3 \cdot k}, (p_3^2 = m^2, k^2 = 0) \\
K_i &\equiv p_i \cdot k \\
\Delta_{ij} &\equiv p_i - p_j \\
\sum_\lambda \not{\epsilon}_d^*(k, \lambda) \not{\epsilon}_h(k, \lambda) &= -g_{dh} \tag{A.17}
\end{aligned}$$

の変換を用いた。

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \sum_{spins} T_1^\dagger T_1 \\
&= \frac{e^6}{(\Delta_{42})^4} Tr\{(\not{p}_1 + m)[\gamma^\mu \frac{(\not{p}_3 + \not{k} + m)}{2K_3} \not{\epsilon}^* + \not{\epsilon}^* \frac{(\not{p}_1 - \not{k} + m)}{-2K_1} \gamma^\mu](\not{p}_3 + m) \\
&\quad \times [\not{\epsilon}^* \frac{(\not{p}_3 + \not{k} + m)}{2K_3} \gamma^{\mu'} + \gamma^{\mu'} \frac{(\not{p}_1 - \not{k} + m)}{-2K_1} \not{\epsilon}^*]\} \times Tr\{(\not{p}_2 + m)\gamma^\nu (\not{p}_4 + m)\gamma^{\nu'}\} g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'} \\
&= \frac{e^6}{(\Delta_{42})^4} \left\{ \frac{1}{(2K_3)^2} Tr[(\not{p}_1 + m)\gamma^\mu (\not{p}_3 + \not{k} + m) \not{\epsilon}^* (\not{p}_3 + m) \not{\epsilon} (\not{p}_3 + \not{k} + m)\gamma^{\mu'}] \right. \\
&\quad - \frac{1}{4K_1 K_3} Tr[(\not{p}_1 + m)\gamma^\mu (\not{p}_3 + \not{k} + m) \not{\epsilon}^* (\not{p}_3 + m)\gamma^{\mu'} (\not{p}_1 - \not{k} + m) \not{\epsilon}] \\
&\quad - \frac{1}{4K_1 K_3} Tr[(\not{p}_1 + m) \not{\epsilon}^* (\not{p}_1 - \not{k} + m)\gamma^\mu (\not{p}_3 + m) \not{\epsilon} (\not{p}_3 + \not{k} + m)\gamma^{\mu'}] \\
&\quad \left. + \frac{1}{(2K_3)^2} Tr[(\not{p}_1 + m) \not{\epsilon}^* (\not{p}_1 - \not{k} + m)\gamma^\mu (\not{p}_3 + m)\gamma^{\mu'} (\not{p}_1 - \not{k} + m) \not{\epsilon}] \right\} \\
&\quad \times Tr[(\not{p}_2 + m)\gamma^\nu (\not{p}_4 + m)\gamma^{\nu'}] g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'} \tag{A.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{22} &= \sum_{spins} T_2^\dagger T_2 \\
&= \frac{e^6}{(\Delta_{31})^4} Tr\{(\not{p}_2 + m)[\gamma^\mu \frac{(\not{p}_4 + \not{k} + m)}{2K_4} \not{\epsilon}^* + \not{\epsilon}^* \frac{(\not{p}_2 - \not{k} + m)}{-2K_2} \gamma^\mu](\not{p}_4 + m) \\
&\quad \times [\not{\epsilon}^* \frac{(\not{p}_4 + \not{k} + m)}{2K_4} \gamma^{\mu'} + \gamma^{\mu'} \frac{(\not{p}_2 - \not{k} + m)}{-2K_2} \not{\epsilon}^*]\} \times Tr\{(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu (\not{p}_3 + m)\gamma^{\nu'}\} g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'} \\
&= \frac{e^6}{(\Delta_{31})^4} \left\{ \frac{1}{(2K_4)^2} Tr[(\not{p}_2 + m)\gamma^\mu (\not{p}_4 + \not{k} + m) \not{\epsilon}^* (\not{p}_4 + m) \not{\epsilon} (\not{p}_4 + \not{k} + m)\gamma^{\mu'}] \right. \\
&\quad - \frac{1}{4K_2 K_4} Tr[(\not{p}_2 + m)\gamma^\mu (\not{p}_4 + \not{k} + m) \not{\epsilon}^* (\not{p}_4 + m)\gamma^{\mu'} (\not{p}_2 - \not{k} + m) \not{\epsilon}] \\
&\quad - \frac{1}{4K_2 K_4} Tr[(\not{p}_2 + m) \not{\epsilon}^* (\not{p}_2 - \not{k} + m)\gamma^\mu (\not{p}_4 + m) \not{\epsilon} (\not{p}_4 + \not{k} + m)\gamma^{\mu'}] \\
&\quad \left. + \frac{1}{(2K_2)^2} Tr[(\not{p}_2 + m) \not{\epsilon}^* (\not{p}_2 - \not{k} + m)\gamma^\mu (\not{p}_4 + m)\gamma^{\mu'} (\not{p}_2 - \not{k} + m) \not{\epsilon}] \right\} \\
&\quad \times Tr[(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu (\not{p}_3 + m)\gamma^{\nu'}] g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'} \tag{A.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{33} &= \sum_{spins} T_3^\dagger T_3 \\
&= \frac{e^6}{(\Delta_{41})^4} Tr\{(\not{p}_2 + m)[\gamma^\mu \frac{(\not{p}_3 + \not{k} + m)}{2K_3} \not{\epsilon}^* + \not{\epsilon}^* \frac{(\not{p}_2 - \not{k} + m)}{-2K_2} \gamma^\mu](\not{p}_3 + m) \\
&\quad \times [\not{\epsilon}^* \frac{(\not{p}_3 + \not{k} + m)}{2K_3} \gamma^{\mu'} + \gamma^{\mu'} \frac{(\not{p}_2 - \not{k} + m)}{-2K_2} \not{\epsilon}^*]\} \times Tr\{(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu (\not{p}_4 + m)\gamma^{\nu'}\} g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'} \\
&= \frac{e^6}{(\Delta_{41})^4} \left\{ \frac{1}{(2K_3)^2} Tr[(\not{p}_2 + m)\gamma^\mu (\not{p}_3 + \not{k} + m) \not{\epsilon}^* (\not{p}_3 + m) \not{\epsilon} (\not{p}_3 + \not{k} + m)\gamma^{\mu'}] \right. \\
&\quad - \frac{1}{4K_2 K_3} Tr[(\not{p}_2 + m)\gamma^\mu (\not{p}_3 + \not{k} + m) \not{\epsilon}^* (\not{p}_3 + m)\gamma^{\mu'} (\not{p}_2 - \not{k} + m) \not{\epsilon}] \\
&\quad - \frac{1}{4K_2 K_3} Tr[(\not{p}_2 + m) \not{\epsilon}^* (\not{p}_2 - \not{k} + m)\gamma^\mu (\not{p}_3 + m) \not{\epsilon} (\not{p}_3 + \not{k} + m)\gamma^{\mu'}] \\
&\quad \left. + \frac{1}{(2K_2)^2} Tr[(\not{p}_2 + m) \not{\epsilon}^* (\not{p}_2 - \not{k} + m)\gamma^\mu (\not{p}_3 + m)\gamma^{\mu'} (\not{p}_2 - \not{k} + m) \not{\epsilon}] \right\} \\
&\quad \times Tr[(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu (\not{p}_4 + m)\gamma^{\nu'}] g_{\mu\nu} \tag{A.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{44} &= \sum_{spins} T_4^\dagger T_4 \\
&= \frac{e^6}{(\Delta_{32})^4} Tr\{(\not{p}_1 + m)[\gamma^\mu \frac{(\not{p}_4 + \not{k} + m)}{2K_4} \not{\epsilon}^* + \not{\epsilon}^* \frac{(\not{p}_1 - \not{k} + m)}{-2K_1} \gamma^\mu](\not{p}_4 + m) \\
&\quad \times [\not{\epsilon}^* \frac{(\not{p}_4 + \not{k} + m)}{2K_4} \gamma^{\mu'} + \gamma^{\mu'} \frac{(\not{p}_1 - \not{k} + m)}{-2K_1} \not{\epsilon}^*]\} \times Tr\{(\not{p}_2 + m)\gamma^\nu(\not{p}_3 + m)\gamma^{\nu'}\} g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'} \\
&= \frac{e^6}{(\Delta_{32})^4} \left\{ \frac{1}{(2K_4)^2} Tr[(\not{p}_1 + m)\gamma^\mu(\not{p}_4 + \not{k} + m) \not{\epsilon}^*(\not{p}_4 + m) \not{\epsilon}(\not{p}_4 + \not{k} + m)\gamma^{\mu'}] \right. \\
&\quad - \frac{1}{4K_1 K_4} Tr[(\not{p}_1 + m)\gamma^\mu(\not{p}_4 + \not{k} + m) \not{\epsilon}^*(\not{p}_4 + m)\gamma^{\mu'}(\not{p}_1 - \not{k} + m) \not{\epsilon}] \\
&\quad - \frac{1}{4K_1 K_4} Tr[(\not{p}_1 + m) \not{\epsilon}^*(\not{p}_1 - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p}_4 + m) \not{\epsilon}(\not{p}_4 + \not{k} + m)\gamma^{\mu'}] \\
&\quad \left. + \frac{1}{(2K_1)^2} Tr[(\not{p}_1 + m) \not{\epsilon}^*(\not{p}_1 - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p}_4 + m)\gamma^{\mu'}(\not{p}_1 - \not{k} + m) \not{\epsilon}] \right\} \\
&\quad \times Tr[(\not{p}_2 + m)\gamma^\nu(\not{p}_3 + m)\gamma^{\nu'}] g_{\mu\nu} \tag{A.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{12} &= \sum_{spins} (T_1^\dagger T_2 + T_2^\dagger T_1) \\
&= \frac{2e^6}{(\Delta_{42}\Delta_{31})^2} Re[Tr\{(\not{p}_1 + m)[\gamma^\mu \frac{(\not{p}_3 + \not{k} + m)}{2K_3} \not{\epsilon}^* + \not{\epsilon}^* \frac{(\not{p}_1 - \not{k} + m)}{-2K_1} \gamma^\mu](\not{p}_3 + m)\gamma^{\nu'}\} \\
&\quad \times Tr\{(\not{p}_4 + m)[\not{\epsilon} \frac{(\not{p}_4 + \not{k} + m)}{2K_4} \gamma^{\mu'} + \gamma^{\mu'} \frac{(\not{p}_2 - \not{k} + m)}{-2K_2} \not{\epsilon}](\not{p}_2 + m)\gamma^\nu\}] g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'} \\
&= \frac{2e^6}{(\Delta_{42}\Delta_{31})^2} Re\left[\frac{1}{4K_3 K_4} \{ Tr[(\not{p}_1 + m)\gamma^\mu(\not{p}_3 + \not{k} + m) \not{\epsilon}^*(\not{p}_3 + m) \right. \\
&\quad \times \gamma^{\nu'}(\not{p}_4 + m) \not{\epsilon}(\not{p}_4 + \not{k} + m)\gamma^{\mu'}(\not{p}_2 + m)\gamma^\nu] \} \\
&\quad - \frac{1}{4K_2 K_3} \{ Tr[(\not{p}_1 + m)\gamma^\mu(\not{p}_3 + \not{k} + m) \not{\epsilon}^*(\not{p}_3 + m) \\
&\quad \times \gamma^{\nu'}(\not{p}_4 + m)\gamma^{\mu'}(\not{p}_2 - \not{k} + m) \not{\epsilon}(\not{p}_2 + m)\gamma^\nu] \} \\
&\quad - \frac{1}{4K_1 K_4} \{ Tr[(\not{p}_1 + m) \not{\epsilon}^*(\not{p}_1 - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p}_3 + m) \\
&\quad \times \gamma^{\nu'}(\not{p}_4 + m) \not{\epsilon}(\not{p}_4 + \not{k} + m)\gamma^{\mu'}(\not{p}_2 + m)\gamma^\nu] \} \\
&\quad \left. + \frac{1}{4K_1 K_2} \{ Tr[(\not{p}_1 + m) \not{\epsilon}^*(\not{p}_1 - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p}_3 + m) \right. \\
&\quad \times \gamma^{\nu'}(\not{p}_4 + m)\gamma^{\mu'}(\not{p}_2 - \not{k} + m) \not{\epsilon}(\not{p}_2 + m)\gamma^\nu] \} \} g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'} \tag{A.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{13} &= \sum_{spins} (T_1^\dagger T_3 + T_3^\dagger T_1) \\
&= \frac{e^6}{(\Delta_{42}\Delta_{41})^2} \text{Re}[Tr\{(\not{p}_1 + m)[\gamma^\mu \frac{(\not{p}_3 + \not{k} + m)}{2K_3} \not{\epsilon}^* + \not{\epsilon}^* \frac{(\not{p}_1 - \not{k} + m)}{-2K_1} \gamma^\mu](\not{p}_3 + m)\gamma^{\nu'}\}] \\
&\quad \times Tr\{(\not{p}_4 + m)[\not{\epsilon} \frac{(\not{p}_4 + \not{k} + m)}{2K_4} \gamma^{\mu'} + \gamma^{\mu'} \frac{(\not{p}_2 - \not{k} + m)}{-2K_2} \not{\epsilon}](\not{p}_2 + m)\gamma^\nu\}] g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'} \\
&= \frac{-2e^6}{(\Delta_{42}\Delta_{41})^2} \text{Re}[\frac{1}{4K_3^2} \{Tr[(\not{p}_1 + m)\gamma^\mu(\not{p}_3 + \not{k} + m) \not{\epsilon}^*(\not{p}_3 + m) \\
&\quad \times \not{\epsilon}(\not{p}_3 + \not{k} + m)\gamma^{\mu'}(\not{p}_2 + m)\gamma^\nu(\not{p}_4 + m)\gamma^{\nu'}]\}] \\
&\quad - \frac{1}{4K_2 K_3} \{Tr[(\not{p}_1 + m)\gamma^\mu(\not{p}_3 + \not{k} + m) \not{\epsilon}^*(\not{p}_3 + m) \\
&\quad \times \gamma^{\mu'}(\not{p}_2 - \not{k} + m) \not{\epsilon}(\not{p}_2 + m)\gamma^\nu(\not{p}_4 + m)\gamma^{\nu'}]\}] \\
&\quad - \frac{1}{4K_1 K_3} \{Tr[(\not{p}_1 + m) \not{\epsilon}^*(\not{p}_1 - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p}_3 + m) \\
&\quad \times \not{\epsilon}(\not{p}_3 + \not{k} + m)\gamma^{\mu'}(\not{p}_2 + m)\gamma^\nu(\not{p}_4 + m)\gamma^{\nu'}]\}] \\
&\quad + \frac{1}{4K_1 K_2} \{Tr[(\not{p}_1 + m) \not{\epsilon}^*(\not{p}_1 - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p}_3 + m) \\
&\quad \times \gamma^{\mu'}(\not{p}_2 - \not{k} + m) \not{\epsilon}(\not{p}_2 + m)\gamma^\nu(\not{p}_4 + m)\gamma^{\nu'}]\}] g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'} \tag{A.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{14} &= \sum_{spins} (T_1^\dagger T_4 + T_4^\dagger T_1) \\
&= \frac{-2e^6}{(\Delta_{42}\Delta_{32})^2} \text{Re}[Tr\{(\not{p}_1 + m)[\gamma^\mu \frac{(\not{p}_3 + \not{k} + m)}{2K_3} \not{\epsilon}^* + \not{\epsilon}^* \frac{(\not{p}_1 - \not{k} + m)}{-2K_1} \gamma^\mu](\not{p}_3 + m)\gamma^{\nu'}\}] \\
&\quad \times Tr\{(\not{p}_2 + m)\gamma^\nu(\not{p}_4 + m)[\not{\epsilon} \frac{(\not{p}_4 + \not{k} + m)}{2K_4} \gamma^{\mu'} + \gamma^{\mu'} \frac{(\not{p}_1 - \not{k} + m)}{-2K_1} \not{\epsilon}]\}] g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'} \\
&= \frac{-2e^6}{(\Delta_{42}\Delta_{32})^2} \text{Re}[\frac{1}{4K_3 K_4} \{Tr[(\not{p}_1 + m)\gamma^\mu(\not{p}_3 + \not{k} + m) \not{\epsilon}^*(\not{p}_3 + m)\gamma^{\nu'} \\
&\quad \times (\not{p}_2 + m)\gamma^\nu(\not{p}_4 + m) \not{\epsilon}(\not{p}_4 + \not{k} + m)\gamma^{\mu'}]\}] \\
&\quad - \frac{1}{4K_1 K_3} \{Tr[(\not{p}_1 + m)\gamma^\mu(\not{p}_3 + \not{k} + m) \not{\epsilon}^*(\not{p}_3 + m)\gamma^{\nu'} \\
&\quad \times (\not{p}_2 + m)\gamma^\nu(\not{p}_4 + m)\gamma^{\mu'}(\not{p}_1 - \not{k} + m) \not{\epsilon}]\}] \\
&\quad - \frac{1}{4K_1 K_4} \{Tr[(\not{p}_1 + m) \not{\epsilon}^*(\not{p}_1 - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p}_3 + m)\gamma^{\nu'} \\
&\quad \times (\not{p}_2 + m)\gamma^\nu(\not{p}_4 + m) \not{\epsilon}(\not{p}_4 + \not{k} + m)\gamma^{\mu'}]\}] \\
&\quad + \frac{1}{4K_1^2} \{Tr[(\not{p}_1 + m) \not{\epsilon}^*(\not{p}_1 - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p}_3 + m)\gamma^{\nu'} \\
&\quad \times (\not{p}_2 + m)\gamma^\nu(\not{p}_4 + m)\gamma^{\mu'}(\not{p}_1 - \not{k} + m) \not{\epsilon}]\}] g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'} \tag{A.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{23} &= \sum_{spins} (T_2^\dagger T_3 + T_3^\dagger T_2) \\
&= \frac{-2e^6}{(\Delta_{41}\Delta_{31})^2} \text{Re}[Tr\{(\not{p}_2 + m)[\gamma^\mu \frac{(\not{p}_3 + \not{k} + m)}{2K_3} \not{\epsilon}^* + \not{\epsilon}^* \frac{(\not{p}_2 - \not{k} + m)}{-2K_2} \gamma^\mu](\not{p}_4 + m)\gamma^{\nu'}\}] \\
&\quad \times Tr\{(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu(\not{p}_3 + m)[\not{\epsilon} \frac{(\not{p}_3 + \not{k} + m)}{2K_3} \gamma^{\mu'} + \gamma^{\mu'} \frac{(\not{p}_2 - \not{k} + m)}{-2K_2} \not{\epsilon}]\} g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'} \\
&= \frac{-2e^6}{(\Delta_{41}\Delta_{31})^2} \text{Re}[\frac{1}{4K_3 K_4} \{Tr[(\not{p}_2 + m)\gamma^\mu(\not{p}_4 + \not{k} + m) \not{\epsilon}^*(\not{p}_4 + m)\gamma^{\nu'} \\
&\quad \times (\not{p}_1 + m)\gamma^\nu(\not{p}_3 + m) \not{\epsilon}(\not{p}_3 + \not{k} + m)\gamma^{\mu'}]\} \\
&\quad - \frac{1}{4K_2 K_4} \{Tr[(\not{p}_2 + m)\gamma^\mu(\not{p}_4 + \not{k} + m) \not{\epsilon}^*(\not{p}_4 + m)\gamma^{\nu'} \\
&\quad \times (\not{p}_1 + m)\gamma^\nu(\not{p}_3 + m)\gamma^{\mu'}(\not{p}_2 - \not{k} + m) \not{\epsilon}]\} \\
&\quad - \frac{1}{4K_2 K_3} \{Tr[(\not{p}_2 + m) \not{\epsilon}^*(\not{p}_2 - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p}_4 + m)\gamma^{\nu'} \\
&\quad \times (\not{p}_1 + m)\gamma^\nu(\not{p}_3 + m) \not{\epsilon}(\not{p}_3 + \not{k} + m)\gamma^{\mu'}]\} \\
&\quad + \frac{1}{4K_2^2} \{Tr[(\not{p}_2 + m) \not{\epsilon}^*(\not{p}_2 - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p}_4 + m)\gamma^{\nu'} \\
&\quad \times (\not{p}_1 + m)\gamma^\nu(\not{p}_3 + m)\gamma^{\mu'}(\not{p}_2 - \not{k} + m) \not{\epsilon}]\} g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'} \tag{A.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{24} &= \sum_{spins} (T_2^\dagger T_4 + T_4^\dagger T_2) \\
&= \frac{-2e^6}{(\Delta_{42}\Delta_{31})^2} \text{Re}[Tr\{(\not{p}_2 + m)[\gamma^\mu \frac{(\not{p}_4 + \not{k} + m)}{2K_4} \not{\epsilon}^* + \not{\epsilon}^* \frac{(\not{p}_2 - \not{k} + m)}{-2K_2} \gamma^\mu]\} \\
&\quad \times Tr\{(\not{p}_4 + m)[\not{\epsilon} \frac{(\not{p}_4 + \not{k} + m)}{2K_4} \gamma^{\mu'} + \gamma^{\mu'} \frac{(\not{p}_1 - \not{k} + m)}{-2K_1} \not{\epsilon}](\not{p}_1 + m)\gamma^\nu(\not{p}_3 + m)\gamma^{\nu'}\}] g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'} \\
&= \frac{-2e^6}{(\Delta_{31}\Delta_{32})^2} \text{Re}[\frac{1}{4K_4^2} \{Tr[(\not{p}_2 + m)\gamma^\mu(\not{p}_4 + \not{k} + m) \not{\epsilon}^*(\not{p}_4 + m) \not{\epsilon} \\
&\quad \times (\not{p}_4 + \not{k} + m)\gamma^{\mu'}(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu(\not{p}_3 + m)\gamma^{\nu'}]\} \\
&\quad - \frac{1}{4K_1 K_4} \{Tr[(\not{p}_2 + m)\gamma^\mu(\not{p}_4 + \not{k} + m) \not{\epsilon}^*(\not{p}_4 + m) \not{\epsilon} \\
&\quad \times (\not{p}_1 - \not{k} + m)\gamma^{\mu'}(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu(\not{p}_3 + m)\gamma^{\nu'}]\} \\
&\quad - \frac{1}{4K_2 K_4} \{Tr[(\not{p}_2 + m) \not{\epsilon}^*(\not{p}_2 - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p}_4 + m) \not{\epsilon} \\
&\quad \times (\not{p}_4 + \not{k} + m)\gamma^{\mu'}(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu(\not{p}_3 + m)\gamma^{\nu'}]\} \\
&\quad + \frac{1}{4K_1 K_2} \{Tr[(\not{p}_2 + m) \not{\epsilon}^*(\not{p}_2 - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p}_4 + m) \not{\epsilon} \\
&\quad \times (\not{p}_1 - \not{k} + m)\gamma^{\mu'}(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu(\not{p}_3 + m)\gamma^{\nu'}]\}] g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'} \tag{A.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{34} &= \sum_{spins} (T_3^\dagger T_4 + T_4^\dagger T_3) \\
&= \frac{e^6}{(\Delta_{41} \Delta_{32})^2} \text{Re} \{ \text{Tr} \{ (\not{p}_2 + m) [\gamma^\mu \frac{(\not{p}_3 + \not{k} + m)}{2K_3} \not{\epsilon}^* + \not{\epsilon}^* \frac{(\not{p}_2 - \not{k} + m)}{-2K_2} \gamma^\mu] (\not{p}_3 + m) \gamma^{\nu'} \} \\
&\quad \times \text{Tr} \{ (\not{p}_4 + m) [\not{\epsilon} \frac{(\not{p}_4 + \not{k} + m)}{2K_4} \gamma^{\mu'} + \gamma^{\mu'} \frac{(\not{p}_1 - \not{k} + m)}{-2K_1} \not{\epsilon}] (\not{p}_1 + m) \gamma^{\nu'} \} \} g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'} \\
&= \frac{2e^6}{(\Delta_{41} \Delta_{32})^2} \text{Re} \left[\frac{1}{4K_3 K_4} \{ \text{Tr} [(\not{p}_2 + m) \gamma^\mu (\not{p}_3 + \not{k} + m) \not{\epsilon}^* (\not{p}_3 + m) \gamma^{\nu'} \right. \\
&\quad \times (\not{p}_4 + m) \not{\epsilon} (\not{p}_4 + \not{k} + m) \gamma^{\mu'} (\not{p}_1 + m) \gamma^{\nu'} \} \} \\
&\quad - \frac{1}{4K_1 K_3} \{ \text{Tr} [(\not{p}_2 + m) \gamma^\mu (\not{p}_3 + \not{k} + m) \not{\epsilon}^* (\not{p}_3 + m) \gamma^{\nu'} (\\
&\quad \times \not{p}_4 + m) \gamma^{\mu'} (\not{p}_1 - \not{k} + m) \not{\epsilon} (\not{p}_1 + m) \gamma^{\nu'} \} \} \\
&\quad - \frac{1}{4K_2 K_4} \{ \text{Tr} [(\not{p}_2 + m) \not{\epsilon}^* (\not{p}_2 - \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{p}_3 + m) \gamma^{\nu'} \\
&\quad \times (\not{p}_4 + m) \not{\epsilon} (\not{p}_4 + \not{k} + m) \gamma^{\mu'} (\not{p}_1 + m) \gamma^{\nu'} \} \} \\
&\quad + \frac{1}{4K_1 K_2} \{ \text{Tr} [(\not{p}_2 + m) \not{\epsilon}^* (\not{p}_2 - \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{p}_3 + m) \gamma^{\nu'} \\
&\quad \times (\not{p}_4 + m) \gamma^{\mu'} (\not{p}_1 - \not{k} + m) \not{\epsilon} (\not{p}_1 + m) \gamma^{\nu'} \} \} \} g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'} \tag{A.27}
\end{aligned}$$

これらを用いて実際に Trace 計算を行うのだが、非常に複雑な式の為、Mathematica を用いて計算を行った。

$$\begin{aligned}
& \sum_{spins} T_1^\dagger T_1 = \\
& \frac{1}{(2m^2 - 2p_2 \cdot p_4)^2} \times \\
& \left\{ m^6 \left(-\frac{64}{(k \cdot p_3)^2} - \frac{64}{(k \cdot p_1)^2} \right) \right. \\
& + m^4 \left(\frac{32k \cdot p_1}{(k \cdot p_3)^2} + \frac{32p_1 \cdot p_3}{(k \cdot p_3)^2} + \frac{32p_2 \cdot p_4}{(k \cdot p_3)^2} \right. \\
& - \frac{32}{k \cdot p_3} + \frac{128p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_3 k \cdot p_1} + \frac{32}{k \cdot p_1} \\
& - \left. \frac{32k \cdot p_3}{(k \cdot p_1)^2} + \frac{32p_1 \cdot p_3}{(k \cdot p_1)^2} + \frac{32p_2 \cdot p_4}{(k \cdot p_1)^2} \right) \\
& + m^2 \left(-\frac{64(p_1 \cdot p_3)^2}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} - \frac{64p_2 \cdot p_4 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} + \frac{64p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1} \right. \\
& - \frac{64p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_3} - \frac{32k \cdot p_3}{k \cdot p_1} - \frac{64k \cdot p_2 k \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} \\
& - \frac{32k \cdot p_4 p_1 \cdot p_2}{(k \cdot p_3)^2} - \frac{32k \cdot p_2 p_1 \cdot p_4}{(k \cdot p_3)^2} + \frac{32k \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{(k \cdot p_1)^2} \\
& - \frac{32p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{(k \cdot p_1)^2} - \frac{32p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{(k \cdot p_3)^2} + \frac{32k \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{(k \cdot p_1)^2} \\
& - \left. \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{(k \cdot p_1)^2} - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{(k \cdot p_3)^2} - \frac{32k \cdot p_1}{k \cdot p_3} \right) \\
& + m^0 \left(\frac{32k \cdot p_4 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_3} + \frac{32k \cdot p_4 p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} - \frac{64p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1} \right. \\
& + \frac{32k \cdot p_2 p_1 \cdot p_3 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} + \frac{32k \cdot p_2 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_3} + \frac{32k \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_1} \\
& - \frac{32k \cdot p_4 p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} + \frac{64p_1 \cdot p_3 p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} - \frac{32p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_1} \\
& + \frac{32p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_3} + \frac{32k \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1} - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1} \\
& + \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3} + \frac{64p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} - \frac{32k \cdot p_2 p_1 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} \\
& \left. + \frac{64p_2 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3} \right) \} \\
& \times \frac{e^6}{(2m)^4} \frac{m}{E_1 V} \frac{m}{E_2 V} \frac{m}{E_3 V} \frac{m}{E_4 V} \frac{1}{2k_0 V} (2\pi)^8 \delta^8(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \quad (A.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{spins} T_2^\dagger T_2 = \\
& \frac{1}{(2m^2 - 2p_1 \cdot p_3)^2} \times \\
& \left\{ m^6 \left(-\frac{64}{(k \cdot p_4)^2} - \frac{64}{(k \cdot p_2)^2} \right) \right. \\
& + m^4 \left(\frac{32k \cdot p_2}{(k \cdot p_4)^2} + \frac{32p_1 \cdot p_3}{(k \cdot p_4)^2} + \frac{32p_2 \cdot p_4}{(k \cdot p_4)^2} \right. \\
& - \frac{32}{k \cdot p_4} + \frac{128p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_4 k \cdot p_2} \\
& + \frac{32}{k \cdot p_2} - \frac{32k \cdot p_4}{(k \cdot p_2)^2} + \frac{32p_1 \cdot p_3}{(k \cdot p_2)^2} \\
& \left. + \frac{32p_2 \cdot p_4}{(k \cdot p_2)^2} \right) \\
& + m^2 \left(-\frac{64(p_2 \cdot p_4)^2}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{64p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} + \frac{64p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2} \right. \\
& - \frac{64p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_4} - \frac{32k \cdot p_4}{k \cdot p_2} - \frac{32k \cdot p_3 p_1 \cdot p_2}{(k \cdot p_4)^2} \\
& + \frac{32k \cdot p_3 p_1 \cdot p_4}{(k \cdot p_2)^2} - \frac{32p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{(k \cdot p_2)^2} - \frac{32p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{(k \cdot p_4)^2} \\
& - \frac{32k \cdot p_1 p_2 \cdot p_3}{(k \cdot p_4)^2} - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{(k \cdot p_2)^2} - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{(k \cdot p_4)^2} \\
& \left. + \frac{32k \cdot p_1 p_3 \cdot p_4}{(k \cdot p_2)^2} - \frac{32k \cdot p_2}{k \cdot p_4} - \frac{64k \cdot p_1 k \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} \right) \\
& + m^0 \left(\frac{32k \cdot p_3 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_4} + \frac{32k \cdot p_3 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_2} - \frac{64p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2} \right. \\
& - \frac{32p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2} + \frac{32p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_4} + \frac{32k \cdot p_1 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_4} \\
& + \frac{32k \cdot p_3 p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{32k \cdot p_3 p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} + \frac{64p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} \\
& + \frac{32k \cdot p_1 p_2 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2} + \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_4} + \frac{64p_1 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_4} \\
& \left. + \frac{64p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{32k \cdot p_1 p_2 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} + \frac{32k \cdot p_1 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2} \right) \} \\
& \times \frac{e^6}{(2m)^4} \frac{m}{E_1 V} \frac{m}{E_2 V} \frac{m}{E_3 V} \frac{m}{E_4 V} \frac{1}{2k_0 V} (2\pi)^8 \delta^8(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \tag{A.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{spins} T_3^\dagger T_3 = \\
& \frac{1}{(2m^2 - 2p_1 \cdot p_4)^2} \times \\
& \left\{ m^6 \left(-\frac{64}{(k \cdot p_3)^2} - \frac{64}{(k \cdot p_2)^2} \right) \right. \\
& + m^4 \left(\frac{32k \cdot p_2}{(k \cdot p_3)^2} + \frac{32p_1 \cdot p_4}{(k \cdot p_3)^2} + \frac{32p_2 \cdot p_3}{(k \cdot p_3)^2} \right. \\
& - \frac{32}{k \cdot p_3} + \frac{128p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_3 k \cdot p_2} + \frac{32}{k \cdot p_2} \\
& - \left. \frac{32k \cdot p_3}{(k \cdot p_2)^2} + \frac{32p_1 \cdot p_4}{(k \cdot p_2)^2} + \frac{32p_2 \cdot p_3}{(k \cdot p_2)^2} \right) \\
& + m^2 \left(-\frac{64(p_2 \cdot p_3)^2}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} - \frac{64p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} + \frac{64p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2} \right. \\
& - \frac{64p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_3} - \frac{32k \cdot p_3}{k \cdot p_2} - \frac{64k \cdot p_1 k \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} \\
& - \frac{32k \cdot p_4 p_1 \cdot p_2}{(k \cdot p_3)^2} + \frac{32k \cdot p_4 p_1 \cdot p_3}{(k \cdot p_2)^2} - \frac{32p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{(k \cdot p_2)^2} \\
& - \frac{32p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{(k \cdot p_3)^2} - \frac{32k \cdot p_1 p_2 \cdot p_4}{(k \cdot p_3)^2} - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{(k \cdot p_2)^2} \\
& - \left. \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{(k \cdot p_3)^2} + \frac{32k \cdot p_1 p_3 \cdot p_4}{(k \cdot p_2)^2} - \frac{32k \cdot p_2}{k \cdot p_3} \right) \\
& + m^0 \left(\frac{32k \cdot p_4 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_3} + \frac{32k \cdot p_4 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_2} + \frac{32k \cdot p_4 p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} \right. \\
& - \frac{32k \cdot p_4 p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} - \frac{64p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2} - \frac{32p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2} + \frac{32p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_3} \\
& + \frac{64p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} + \frac{32k \cdot p_1 p_2 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} + \frac{32k \cdot p_1 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_3} \\
& - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2} + \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3} + \frac{64p_1 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3} \\
& + \left. \frac{64p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} - \frac{32k \cdot p_1 p_2 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} + \frac{32k \cdot p_1 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2} \right) \} \\
& \times \frac{e^6}{(2m)^4} \frac{m}{E_1 V} \frac{m}{E_2 V} \frac{m}{E_3 V} \frac{m}{E_4 V} \frac{1}{2k_0 V} (2\pi)^8 \delta^8(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \tag{A.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{spins} T_4^\dagger T_4 = \\
& \frac{1}{(2m^2 - 2p_2 \cdot p_3)^2} \times \\
& \left\{ m^6 \left(-\frac{64}{(k \cdot p_4)^2} - \frac{64}{(k \cdot p_1)^2} \right) \right. \\
& + m^4 \left(\frac{32k \cdot p_1}{(k \cdot p_4)^2} + \frac{32p_1 \cdot p_4}{(k \cdot p_4)^2} + \frac{32p_2 \cdot p_3}{(k \cdot p_4)^2} \right. \\
& - \frac{32}{k \cdot p_4} + \frac{128p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_4 k \cdot p_1} + \frac{32}{k \cdot p_1} \\
& - \left. \frac{32k \cdot p_4}{(k \cdot p_1)^2} + \frac{32p_1 \cdot p_4}{(k \cdot p_1)^2} + \frac{32p_2 \cdot p_3}{(k \cdot p_1)^2} \right) \\
& + m^2 \left(-\frac{64(p_1 \cdot p_4)^2}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} - \frac{64p_2 \cdot p_3 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} + \frac{64p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1} \right. \\
& - \frac{64p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_4} - \frac{32k \cdot p_4}{k \cdot p_1} - \frac{32k \cdot p_3 p_1 \cdot p_2}{(k \cdot p_4)^2} \\
& - \frac{32k \cdot p_2 p_1 \cdot p_3}{(k \cdot p_4)^2} + \frac{32k \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{(k \cdot p_1)^2} - \frac{32p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{(k \cdot p_1)^2} \\
& - \frac{32p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{(k \cdot p_4)^2} + \frac{32k \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{(k \cdot p_1)^2} - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{(k \cdot p_1)^2} \\
& - \left. \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{(k \cdot p_4)^2} - \frac{32k \cdot p_1}{k \cdot p_4} - \frac{64k \cdot p_2 k \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} \right) \\
& + m^0 \left(\frac{32k \cdot p_3 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_4} - \frac{64p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1} + \frac{32k \cdot p_2 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_4} \right. \\
& + \frac{32k \cdot p_3 p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} + \frac{32k \cdot p_2 p_1 \cdot p_3 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} + \frac{32k \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_1} \\
& - \frac{32p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_1} + \frac{32p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_4} + \frac{64p_1 \cdot p_3 p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} \\
& - \frac{32k \cdot p_3 p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} + \frac{32k \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1} - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1} \\
& + \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_4} + \frac{64p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} - \frac{32k \cdot p_2 p_1 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} \\
& \left. + \frac{64p_2 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_4} \right) \} \\
& \times \frac{e^6}{(2m)^4} \frac{m}{E_1 V} \frac{m}{E_2 V} \frac{m}{E_3 V} \frac{m}{E_4 V} \frac{1}{2k_0 V} (2\pi)^8 \delta^8(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \quad (A.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{spins} \left(T_1^\dagger T_2 + T_1 T_2^\dagger \right) = \\
& \frac{1}{(2m^2 - 2p_1 \cdot p_3)(2m^2 - 2p_2 \cdot p_4)} \times \\
& \left\{ m^4 \left(-\frac{128p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} + \frac{128p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} + \frac{128p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} - \frac{128p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} \right) \right. \\
& + m^2 \left(-\frac{32p_2 \cdot p_3 k \cdot p_1}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} + \frac{32p_3 \cdot p_4 k \cdot p_1}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} + \frac{32k \cdot p_1}{k \cdot p_2} \right. \\
& + \frac{32k \cdot p_1}{k \cdot p_4} + \frac{32k \cdot p_3}{k \cdot p_2} + \frac{32k \cdot p_4}{k \cdot p_3} + \frac{32p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_2} \\
& + \frac{32p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_3} + \frac{32p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_4} - \frac{32p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_2} \\
& + \frac{32p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_3} - \frac{32p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_4} + \frac{32k \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} \\
& - \frac{64p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} + \frac{32p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2} - \frac{32p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_3} \\
& + \frac{32p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_4} - \frac{64p_2 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} + \frac{64p_1 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} \\
& + \frac{64p_2 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} - \frac{32p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2} - \frac{32p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3} \\
& + \frac{32k \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} - \frac{32p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_4} + \frac{32k \cdot p_2}{k \cdot p_3} \\
& + \frac{32k \cdot p_3}{k \cdot p_4} + \frac{32k \cdot p_2}{k \cdot p_1} + \frac{32k \cdot p_4}{k \cdot p_1} \\
& - \frac{32k \cdot p_3 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_2 k \cdot p_1} - \frac{32k \cdot p_4 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_2 k \cdot p_1} + \frac{32p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1} \\
& + \frac{64p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_1} - \frac{64p_1 \cdot p_3 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_4 k \cdot p_1} - \frac{32k \cdot p_2 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_4 k \cdot p_1} \\
& + \frac{32k \cdot p_3 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_4 k \cdot p_1} + \frac{32p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1} - \frac{32p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_1} \\
& \left. + \frac{64p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_1} - \frac{64p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_4 k \cdot p_1} - \frac{32p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1} \right)
\end{aligned}$$

(A.32)

$$\begin{aligned}
& + m^0 \left(\frac{64p_1 \cdot p_4 (p_2 \cdot p_3)^2}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} - \frac{64p_1 \cdot p_2 (p_3 \cdot p_4)^2}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} - 64p_1 \cdot p_2 \right. \\
& - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1} + \frac{32k \cdot p_3 p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} + \frac{32k \cdot p_3 p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} \\
& - \frac{32p_1 \cdot p_3 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1} - 64p_1 \cdot p_4 + \frac{64(p_1 \cdot p_4)^2 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} \\
& + \frac{32k \cdot p_4 p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} + \frac{32k \cdot p_4 p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} + \frac{32p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_3} \\
& - \frac{64p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} - \frac{32p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_1} - \frac{32p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2} \\
& + \frac{32p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_3} + \frac{32p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_4} - 64p_2 \cdot p_3 - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2} \\
& + \frac{32p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_4} - \frac{32p_2 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2} - \frac{64(p_1 \cdot p_2)^2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} \\
& + \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1} + \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2} - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3} \\
& - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_4} + \frac{32p_1 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3} + \frac{64p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} \\
& - \frac{32k \cdot p_2 p_1 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} - \frac{32k \cdot p_2 p_1 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} + \frac{64p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} - \frac{64p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} \\
& - \frac{32k \cdot p_1 p_2 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} - \frac{32k \cdot p_1 p_2 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} + \frac{32p_2 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_4} - 64p_3 \cdot p_4 \left. \right\} \\
& \times \frac{e^6}{(2m)^4} \frac{m}{E_1 V} \frac{m}{E_2 V} \frac{m}{E_3 V} \frac{m}{E_4 V} \frac{1}{2k_0 V} (2\pi)^8 \delta^8(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \tag{A.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{spins} (T_1^\dagger T_3 + T_1 T_3^\dagger) = \\
& \frac{1}{(2m^2 - 2p_1 \cdot p_4)(2m^2 - 2p_2 \cdot p_4)} \times \\
& \left\{ -m^6 \frac{64}{(k \cdot p_3)^2} \right. \\
& + m^4 \left(\frac{32k \cdot p_1}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} + \frac{32k \cdot p_1}{(k \cdot p_3)^2} + \frac{32k \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} \right. \\
& + \frac{32k \cdot p_4}{(k \cdot p_3)^2} + \frac{32p_1 \cdot p_2}{(k \cdot p_3)^2} + \frac{32p_1 \cdot p_3}{(k \cdot p_3)^2} + \frac{32p_1 \cdot p_4}{(k \cdot p_3)^2} \\
& + \frac{64p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} + \frac{32p_2 \cdot p_3}{(k \cdot p_3)^2} + \frac{32p_2 \cdot p_4}{(k \cdot p_3)^2} + \frac{32p_3 \cdot p_4}{(k \cdot p_3)^2} \\
& + \frac{32}{k \cdot p_2} - \frac{32}{k \cdot p_3} + \frac{32k \cdot p_2}{(k \cdot p_3)^2} + \frac{32k \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_1} \\
& - \frac{32k \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_1} + \frac{32k \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_1} - \frac{64p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_2 k \cdot p_1} + \frac{64p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_3 k \cdot p_1} \\
& \left. + \frac{32k \cdot p_2}{k \cdot p_3 k \cdot p_1} + \frac{32}{k \cdot p_1} \right) \\
& + m^2 \left(\frac{32(p_1 \cdot p_2)^2}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} - \frac{32k \cdot p_3 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} - \frac{32k \cdot p_4 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} \right. \\
& - \frac{16k \cdot p_4 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} - \frac{16k \cdot p_4 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} - \frac{64k \cdot p_4 p_1 \cdot p_2}{(k \cdot p_3)^2} + \frac{32p_1 \cdot p_3 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} \\
& - \frac{32p_1 \cdot p_3 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} + \frac{32p_1 \cdot p_4 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} + \frac{32p_2 \cdot p_3 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} - \frac{32p_2 \cdot p_3 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} \\
& + \frac{32p_2 \cdot p_4 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} + \frac{32p_3 \cdot p_4 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} - \frac{64p_3 \cdot p_4 p_1 \cdot p_2}{(k \cdot p_3)^2} - \frac{32p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_3} \\
& - \frac{32(p_1 \cdot p_3)^2}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} - \frac{32(p_2 \cdot p_3)^2}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} + \frac{32k \cdot p_3}{k \cdot p_1} + \frac{32k \cdot p_3}{k \cdot p_2} \\
& - \frac{32k \cdot p_3 k \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} - \frac{32k \cdot p_2 k \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} - \frac{32k \cdot p_1 k \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} + \frac{32k \cdot p_4}{k \cdot p_3} \\
& - \frac{16k \cdot p_4 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} + \frac{16k \cdot p_4 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} + \frac{32p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1} - \frac{32p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_2} - \frac{64p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_3} \\
& + \frac{16k \cdot p_3 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} - \frac{32p_1 \cdot p_3 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} + \frac{32p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1} + \frac{16p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_2} \\
& + \frac{16k \cdot p_2 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} - \frac{16p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_3} - \frac{16k \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} + \frac{16k \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} \\
& - \frac{32p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} - \frac{32p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} - \frac{32p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} - \frac{32p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_1} \\
& + \frac{32p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2} - \frac{64p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_3} + \frac{16k \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} - \frac{32p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} \\
& - \frac{32p_2 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} + \frac{16p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_1} + \frac{32p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2} + \frac{16k \cdot p_1 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} - \frac{16p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_3} \\
& - \frac{32p_1 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} - \frac{32p_2 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} - \frac{48p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1} - \frac{48p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2} \\
& \left. - \frac{16k \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} - \frac{16k \cdot p_1 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} - \frac{64p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3} \right)
\end{aligned}$$

(A.34)

$$\begin{aligned}
& + m^0 \left(\frac{64k \cdot p_4 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_3} + \frac{32k \cdot p_4 p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1} \right. \\
& + \frac{32k \cdot p_4 p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2} - \frac{64(p_1 \cdot p_2)^2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} + \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1} \\
& + \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2} + \frac{64p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3} + \frac{64p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} - \frac{32k \cdot p_2 p_1 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} \\
& \left. + \frac{32p_1 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3} + \frac{64p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} - \frac{32k \cdot p_1 p_2 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} + \frac{32p_2 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3} - 64p_3 \cdot p_4 \right) \} \\
& \times \frac{e^6}{(2m)^4} \frac{m}{E_1 V} \frac{m}{E_2 V} \frac{m}{E_3 V} \frac{m}{E_4 V} \frac{1}{2k_0 V} (2\pi)^8 \delta^8(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \tag{A.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{spins} (T_1^\dagger T_4 + T_1 T_4^\dagger) = \\
& \frac{1}{(2m^2 - 2p_2 \cdot p_3)(2m^2 - 2p_2 \cdot p_4)} \times \\
& \left\{ -m^6 \frac{64}{(k \cdot p_1)^2} \right. \\
& + m^4 \left(-\frac{32k \cdot p_1}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} - \frac{64p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} \right. \\
& - \frac{32}{k \cdot p_3} + \frac{32k \cdot p_2}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} - \frac{32}{k \cdot p_4} - \frac{32k \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_1} \\
& + \frac{64p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_3 k \cdot p_1} + \frac{64p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_4 k \cdot p_1} - \frac{32k \cdot p_2}{k \cdot p_3 k \cdot p_1} - \frac{32k \cdot p_2}{k \cdot p_4 k \cdot p_1} \\
& - \frac{32k \cdot p_3}{k \cdot p_4 k \cdot p_1} + \frac{32}{k \cdot p_1} - \frac{32k \cdot p_2}{(k \cdot p_1)^2} - \frac{32k \cdot p_3}{(k \cdot p_1)^2} \\
& - \frac{32k \cdot p_4}{(k \cdot p_1)^2} + \frac{32p_1 \cdot p_2}{(k \cdot p_1)^2} + \frac{32p_1 \cdot p_3}{(k \cdot p_1)^2} + \frac{32p_1 \cdot p_4}{(k \cdot p_1)^2} \\
& \left. + \frac{32p_2 \cdot p_3}{(k \cdot p_1)^2} + \frac{32p_2 \cdot p_4}{(k \cdot p_1)^2} + \frac{32p_3 \cdot p_4}{(k \cdot p_1)^2} \right) \\
& + m^2 \left(-\frac{32(p_1 \cdot p_3)^2}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} - \frac{32p_1 \cdot p_4 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} \right. \\
& - \frac{32p_1 \cdot p_4 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} - \frac{32p_2 \cdot p_3 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} - \frac{32p_2 \cdot p_4 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} - \frac{32p_3 \cdot p_4 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} \\
& + \frac{32p_3 \cdot p_4 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} + \frac{64p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1} - \frac{32p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_3} - \frac{16k \cdot p_2 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} \\
& + \frac{16k \cdot p_2 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} + \frac{32p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_4} - \frac{32(p_1 \cdot p_4)^2}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} + \frac{32(p_3 \cdot p_4)^2}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} \\
& + \frac{32k \cdot p_2}{k \cdot p_1} - \frac{32k \cdot p_2 k \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} + \frac{16k \cdot p_4 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} + \frac{64p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1} \\
& + \frac{48p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_3} + \frac{16k \cdot p_3 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} + \frac{48p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_4} - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} \\
& + \frac{64p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1} - \frac{16k \cdot p_2 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} + \frac{32p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_3} + \frac{16k \cdot p_2 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} \\
& - \frac{32p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_4} - \frac{16k \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} - \frac{32p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} + \frac{16p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_1} \\
& - \frac{32p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_3} - \frac{16k \cdot p_1 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} - \frac{16p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_4} - \frac{32p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} \\
& + \frac{16p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_1} - \frac{16p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_3} - \frac{16k \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} - \frac{16k \cdot p_1 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} \\
& - \frac{32p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_4} + \frac{64k \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{(k \cdot p_1)^2} + \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} - \frac{64p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{(k \cdot p_1)^2} \\
& - \frac{32p_1 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} + \frac{32p_1 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} + \frac{32p_2 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} \\
& + \frac{32p_2 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} + \frac{32p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1} + \frac{16k \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} + \frac{16k \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} \\
& + \frac{32k \cdot p_1 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} + \frac{32k \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} + \frac{32k \cdot p_1}{k \cdot p_3} + \frac{32k \cdot p_1}{k \cdot p_4} \\
& \left. - \frac{32k \cdot p_2 k \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} - \frac{32k \cdot p_1 k \cdot p_2}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} \right)
\end{aligned}$$

(A.36)

$$\begin{aligned}
& - m^0 \left(\frac{64p_1 \cdot p_2 (p_3 \cdot p_4)^2}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} - 64p_1 \cdot p_2 + \frac{32k \cdot p_4 p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1} \right. \\
& - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1} + \frac{32k \cdot p_3 p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} + \frac{64k \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1} - \frac{64p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1} \\
& - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3} - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_4} + \frac{64p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} - \frac{32k \cdot p_2 p_1 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} \\
& \left. + \frac{64p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} - \frac{32k \cdot p_2 p_1 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} + \frac{32p_2 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3} + \frac{32p_2 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_4} \right) \} \\
& \times \frac{e^6}{(2m)^4} \frac{m}{E_1 V} \frac{m}{E_2 V} \frac{m}{E_3 V} \frac{m}{E_4 V} \frac{1}{2k_0 V} (2\pi)^8 \delta^8(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \tag{A.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{spins} (T_2^\dagger T_3 + T_2 T_3^\dagger) = \\
& \frac{1}{(2m^2 - 2p_1 \cdot p_3)(2m^2 - 2p_1 \cdot p_4)} \times \\
& \left\{ -m^6 \frac{64}{(k \cdot p_2)^2} \right. \\
& + m^4 \left(-\frac{32k \cdot p_1}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} - \frac{32k \cdot p_1}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} + \frac{32k \cdot p_1}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} \right. \\
& - \frac{32k \cdot p_1}{(k \cdot p_2)^2} - \frac{32k \cdot p_3}{(k \cdot p_2)^2} - \frac{32k \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} - \frac{32k \cdot p_4}{(k \cdot p_2)^2} \\
& + \frac{32p_1 \cdot p_2}{(k \cdot p_2)^2} + \frac{32p_1 \cdot p_3}{(k \cdot p_2)^2} + \frac{32p_1 \cdot p_4}{(k \cdot p_2)^2} \\
& + \frac{64p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} + \frac{32p_2 \cdot p_3}{(k \cdot p_2)^2} + \frac{64p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} \\
& + \frac{32p_2 \cdot p_4}{(k \cdot p_2)^2} - \frac{64p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} + \frac{32p_3 \cdot p_4}{(k \cdot p_2)^2} \\
& + \left. \frac{32}{k \cdot p_2} - \frac{32}{k \cdot p_3} - \frac{32k \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{32k \cdot p_2}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} - \frac{32}{k \cdot p_4} \right) \\
& + m^2 \left(-\frac{32(p_2 \cdot p_3)^2}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} - \frac{32p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} \right. \\
& - \frac{32p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} - \frac{32p_2 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} - \frac{32p_2 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} \\
& - \frac{32p_3 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} + \frac{32p_3 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} + \frac{64p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2} \\
& - \frac{32p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_3} - \frac{16k \cdot p_1 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} + \frac{16k \cdot p_1 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} \\
& + \frac{32p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_4} - \frac{32(p_2 \cdot p_4)^2}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} + \frac{32(p_3 \cdot p_4)^2}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} - \frac{32k \cdot p_1 k \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} + \frac{16k \cdot p_4 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} + \frac{64p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_2} + \frac{48p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_3} \\
& + \frac{16k \cdot p_3 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} + \frac{48p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_4} - \frac{16k \cdot p_4 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} \\
& + \frac{16p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_2} - \frac{32p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_3} - \frac{16k \cdot p_2 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} - \frac{16p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_4} + \frac{16p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_2} - \frac{16p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_3} \\
& - \frac{16k \cdot p_3 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{16k \cdot p_2 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} - \frac{32p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_4} \\
& - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{32p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{32p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} \\
& + \frac{64p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2} - \frac{16k \cdot p_1 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} + \frac{32p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_3} + \frac{16k \cdot p_1 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} - \frac{32p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_4} + \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} \\
& - \frac{64p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{(k \cdot p_2)^2} + \frac{32p_1 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} + \frac{32p_1 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} \\
& - \frac{32p_2 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} + \frac{32p_2 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} + \frac{32p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2} \\
& + \frac{16k \cdot p_1 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} + \frac{16k \cdot p_1 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} + \frac{32k \cdot p_1 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} \\
& + \frac{32k \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} + \frac{64k \cdot p_1 p_3 \cdot p_4}{(k \cdot p_2)^2} + \frac{32k \cdot p_1}{k \cdot p_2} \\
& + \left. \frac{32k \cdot p_2}{k \cdot p_3} + \frac{32k \cdot p_2}{k \cdot p_4} - \frac{32k \cdot p_1 k \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{32k \cdot p_1 k \cdot p_2}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} \right)
\end{aligned}$$

(A.38)

$$\begin{aligned}
& - m^0 \left(\frac{64p_1 \cdot p_2 (p_3 \cdot p_4)^2}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} - 64p_1 \cdot p_2 + \frac{32k \cdot p_4 p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2} \right. \\
& - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2} + \frac{32k \cdot p_3 p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{64p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2} \\
& - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3} - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_4} + \frac{32p_1 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3} \\
& + \frac{32p_1 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_4} + \frac{64p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} - \frac{32k \cdot p_1 p_2 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} \\
& \left. + \frac{64p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{32k \cdot p_1 p_2 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} + \frac{64k \cdot p_1 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2} \right) \} \\
& \times \frac{e^6}{(2m)^4} \frac{m}{E_1 V} \frac{m}{E_2 V} \frac{m}{E_3 V} \frac{m}{E_4 V} \frac{1}{2k_0 V} (2\pi)^8 \delta^8(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \tag{A.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{spins} \left(T_2^\dagger T_4 + T_2 T_4^\dagger \right) = \\
& \frac{1}{(2m^2 - 2p_1 \cdot p_3)(2m^2 - 2p_2 \cdot p_3)} \times \\
& \left\{ -m^6 \frac{64}{(k \cdot p_4)^2} \right. \\
& + m^4 \left(\frac{32k \cdot p_1}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} + \frac{32k \cdot p_1}{(k \cdot p_4)^2} + \frac{32p_1 \cdot p_2}{(k \cdot p_4)^2} \right. \\
& + \frac{32p_1 \cdot p_3}{(k \cdot p_4)^2} + \frac{32p_1 \cdot p_4}{(k \cdot p_4)^2} + \frac{32p_2 \cdot p_3}{(k \cdot p_4)^2} \\
& + \frac{64p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} + \frac{32p_2 \cdot p_4}{(k \cdot p_4)^2} + \frac{32p_3 \cdot p_4}{(k \cdot p_4)^2} \\
& + \frac{32}{k \cdot p_2} + \frac{32k \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{32}{k \cdot p_4} \\
& + \frac{32k \cdot p_2}{(k \cdot p_4)^2} + \frac{32k \cdot p_3}{(k \cdot p_4)^2} - \frac{32k \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_1} \\
& + \frac{32k \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_1} - \frac{64p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_2 k \cdot p_1} + \frac{64p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_4 k \cdot p_1} \\
& \left. + \frac{32k \cdot p_2}{k \cdot p_4 k \cdot p_1} + \frac{32k \cdot p_3}{k \cdot p_4 k \cdot p_1} + \frac{32}{k \cdot p_1} \right) \\
& + m^2 \left(\frac{32(p_1 \cdot p_2)^2}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} - \frac{32k \cdot p_3 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} - \frac{32k \cdot p_4 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} \right. \\
& + \frac{32p_1 \cdot p_3 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} + \frac{32p_1 \cdot p_4 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} - \frac{32p_1 \cdot p_4 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} + \frac{32p_2 \cdot p_3 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} \\
& + \frac{32p_2 \cdot p_4 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} - \frac{32p_2 \cdot p_4 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} + \frac{32p_3 \cdot p_4 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} - \frac{64p_3 \cdot p_4 p_1 \cdot p_2}{(k \cdot p_4)^2} \\
& - \frac{16k \cdot p_3 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} - \frac{16k \cdot p_3 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{32p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_4} - \frac{64k \cdot p_3 p_1 \cdot p_2}{(k \cdot p_4)^2} \\
& - \frac{32(p_1 \cdot p_4)^2}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} - \frac{32(p_2 \cdot p_4)^2}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{32k \cdot p_3 k \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} + \frac{32k \cdot p_4}{k \cdot p_1} \\
& + \frac{32k \cdot p_4}{k \cdot p_2} + \frac{16k \cdot p_4 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} + \frac{32p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1} + \frac{16p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_2} \\
& + \frac{16k \cdot p_2 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} - \frac{16p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_4} - \frac{16k \cdot p_3 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} - \frac{32p_1 \cdot p_3 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} \\
& + \frac{32p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1} - \frac{32p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_2} + \frac{16k \cdot p_3 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{64p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_4} \\
& + \frac{16k \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} - \frac{32p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} + \frac{16p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_1} + \frac{32p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2} \\
& + \frac{16k \cdot p_1 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{16p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_4} - \frac{16k \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} - \frac{32p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} \\
& - \frac{32p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} - \frac{32p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{32p_2 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{32p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_1} \\
& + \frac{32p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2} + \frac{16k \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} - \frac{64p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_4} - \frac{32p_1 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} \\
& - \frac{32p_2 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{48p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1} - \frac{48p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2} - \frac{16k \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} \\
& \left. - \frac{16k \cdot p_1 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{64p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_4} - \frac{32k \cdot p_2 k \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} - \frac{32k \cdot p_1 k \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} + \frac{32k \cdot p_3}{k \cdot p_4} \right)
\end{aligned} \tag{A.40}$$

$$\begin{aligned}
& + m^0 \left(\frac{64k \cdot p_3 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_4} - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1} + \frac{32k \cdot p_3 p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2} \right. \\
& + \frac{32k \cdot p_3 p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{64(p_1 \cdot p_2)^2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} + \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1} + \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2} \\
& + \frac{64p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_4} + \frac{64p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} - \frac{32k \cdot p_2 p_1 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_4} + \frac{32p_1 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_4} \\
& \left. + \frac{64p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{32k \cdot p_1 p_2 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} + \frac{32p_2 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_4} - 64p_3 \cdot p_4 \right) \} \\
& \times \frac{e^6}{(2m)^4} \frac{m}{E_1 V} \frac{m}{E_2 V} \frac{m}{E_3 V} \frac{m}{E_4 V} \frac{1}{2k_0 V} (2\pi)^8 \delta^8(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \tag{A.41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{spins} \left(T_3^\dagger T_4 + T_3 T_4^\dagger \right) = \\
& \frac{1}{(2m^2 - 2p_1 \cdot p_4)(2m^2 - 2p_2 \cdot p_3)} \times \\
& \left\{ m^4 \left(-\frac{128p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} + \frac{128p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} + \frac{128p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{128p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} \right) \right. \\
& + m^2 \left(-\frac{32p_2 \cdot p_4 k \cdot p_1}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} + \frac{32p_3 \cdot p_4 k \cdot p_1}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} + \frac{32k \cdot p_1}{k \cdot p_2} \right. \\
& + \frac{32k \cdot p_1}{k \cdot p_3} + \frac{32k \cdot p_4}{k \cdot p_2} + \frac{32k \cdot p_4}{k \cdot p_3} + \frac{32p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_2} \\
& + \frac{32p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_3} + \frac{32p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_4} - \frac{32p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_2} - \frac{32p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_3} \\
& + \frac{32p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_4} - \frac{64p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{64p_2 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} + \frac{32p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2} \\
& + \frac{32p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_3} + \frac{32k \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{32p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_4} + \frac{64p_1 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} \\
& + \frac{64p_2 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} - \frac{32p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2} - \frac{32p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3} + \frac{32k \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} \\
& \left. - \frac{32p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_4} + \frac{32k \cdot p_2}{k \cdot p_4} + \frac{32k \cdot p_3}{k \cdot p_4} + \frac{32k \cdot p_2}{k \cdot p_1} \right. \\
& + \frac{32k \cdot p_3}{k \cdot p_1} - \frac{32k \cdot p_3 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_2 k \cdot p_1} - \frac{32k \cdot p_4 p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_2 k \cdot p_1} + \frac{32p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1} \\
& + \frac{32k \cdot p_4 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_3 k \cdot p_1} - \frac{32k \cdot p_2 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_3 k \cdot p_1} + \frac{32p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1} + \frac{64p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_1} \\
& \left. - \frac{64p_1 \cdot p_3 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_1} + \frac{64p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2 k \cdot p_1} - \frac{64p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_3 k \cdot p_1} - \frac{32p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_1} \right. \\
& \left. - \frac{32p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1} \right)
\end{aligned}$$

(A.42)

$$\begin{aligned}
& + m^0 \left(\frac{64p_1 \cdot p_3 (p_2 \cdot p_4)^2}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{64p_1 \cdot p_2 (p_3 \cdot p_4)^2}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} - 64p_1 \cdot p_2 + \frac{32k \cdot p_4 p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} \right. \\
& + \frac{32k \cdot p_4 p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_3}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} - 64p_1 \cdot p_3 - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1} - \frac{32p_1 \cdot p_3 p_1 \cdot p_4}{k \cdot p_1} - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_2} \\
& + \frac{32p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_3}{k \cdot p_3} + \frac{64(p_1 \cdot p_3)^2 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} + \frac{32k \cdot p_3 p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} + \frac{32k \cdot p_3 p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} \\
& - \frac{64p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} - \frac{32p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_1} - \frac{32p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2} + \frac{32p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_3} \\
& + \frac{32p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_4} + \frac{32p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_4} - \frac{32p_2 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{k \cdot p_2} - 64p_2 \cdot p_4 - \frac{64(p_1 \cdot p_2)^2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} \\
& + \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1} + \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2} - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3} - \frac{32p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_4} \\
& + \frac{64p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} - \frac{32k \cdot p_2 p_1 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} - \frac{32k \cdot p_2 p_1 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} + \frac{32p_1 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_4} \\
& + \frac{32p_2 \cdot p_3 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3} + \frac{64p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} - \frac{64p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} - \frac{32k \cdot p_1 p_2 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_2 k \cdot p_4} \\
& - \left. \frac{32k \cdot p_1 p_2 \cdot p_4 p_3 \cdot p_4}{k \cdot p_3 k \cdot p_4} - 64p_3 \cdot p_4 \right) \} \\
& \times \frac{e^6}{(2m)^4} \frac{m}{E_1 V} \frac{m}{E_2 V} \frac{m}{E_3 V} \frac{m}{E_4 V} \frac{1}{2k_0 V} (2\pi)^8 \delta^8(p_3 + p_4 + k - p_1 - p_2) \tag{A.43}
\end{aligned}$$

付録B 電子 - イオン熱制動放射超相対論近似の導出

•PPR

Bethe-Heitler(1954) の論文によって、Maxwell-Boltzman 分布に従う電子 - イオン熱制動放射散乱断面積が与えられている。それを用いると、PPR は以下のように表す事が出来る。

$$P(k, \theta_e) = \int_{mc^2+k}^{\infty} \sigma n_i v_0 \frac{dN}{d\epsilon} d\epsilon \quad (\text{B.1})$$

$$\sigma_{ER} = \frac{4}{\epsilon^2} \alpha Z^2 r_0^2 \frac{dk}{k} \left[\epsilon^2 + (\epsilon - k)^2 - \frac{2}{3} \epsilon (\epsilon - k) \right] \left[\ln \left(\frac{2\epsilon(\epsilon - k)}{kmc^2} \right) - \frac{1}{2} \right] \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{dN}{d\epsilon} = \frac{\epsilon^2 \exp\left(-\frac{\epsilon}{k_B T}\right)}{\theta_e (mc^2)^3 K_2\left(\frac{1}{\theta_e}\right)} n_e \quad (\text{B.3})$$

但し、 $\theta_e = \frac{k_B T}{mc^2}$ である。

これらを用いて計算を行う。超相対論近似 $v_0 \simeq c$ より、

$$P(k, \theta_e) = 4n_i n_e \alpha Z^2 r_0^2 \frac{dk}{k} \frac{c}{\theta_e (mc^2)^3 K_2\left(\frac{1}{\theta_e}\right)} \times \int_{mc^2+k}^{\infty} \exp\left(-\frac{\epsilon}{k_B T}\right) \left[\epsilon^2 + (\epsilon - k)^2 - \frac{2}{3} \epsilon (\epsilon - k) \right] \left[\ln \left(\frac{2\epsilon(\epsilon - k)}{kmc^2} \right) - \frac{1}{2} \right] d\epsilon \quad (\text{B.4})$$

ここで、

$$I = \int_{mc^2+k}^{\infty} \exp\left(-\frac{\epsilon}{k_B T}\right) \left[\epsilon^2 + (\epsilon - k)^2 - \frac{2}{3} \epsilon (\epsilon - k) \right] \left[\ln \left(\frac{2\epsilon(\epsilon - k)}{kmc^2} \right) - \frac{1}{2} \right] d\epsilon \quad (\text{B.5})$$

とおき、 $\epsilon - k \rightarrow \epsilon$ とすると、

$$I = \exp\left(-\frac{k}{k_B T}\right) \int_{mc^2}^{\infty} \exp\left(-\frac{\epsilon}{k_B T}\right) \left[(\epsilon + k)^2 + \epsilon^2 - \frac{2}{3} \epsilon (\epsilon + k) \right] \left[\ln \left(\frac{2\epsilon(\epsilon + k)}{kmc^2} \right) - \frac{1}{2} \right] d\epsilon \quad (\text{B.6})$$

と表す事が出来る。また、変数として

$$\begin{aligned} \theta_e &= \frac{k_B T}{mc^2} \\ \frac{\epsilon}{mc^2} &\rightarrow \epsilon \\ \frac{k}{mc^2} &\rightarrow k \\ x &= \frac{k}{\theta_e} \end{aligned}$$

を用いると、

$$I = (mc^2)^3 e^{-x} \int_1^\infty e^{-\frac{\epsilon}{\theta_e}} \left[(\epsilon + k)^2 + \epsilon^2 - \frac{2}{3}\epsilon(\epsilon + k) \right] \left[\ln \left(\frac{2\epsilon(\epsilon + k)}{kmc^2} \right) - \frac{1}{2} \right] d\epsilon \quad (\text{B.7})$$

を得る。更に、

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{\theta_e} &\rightarrow s \\ \frac{k}{\theta_e} &\rightarrow x \end{aligned}$$

とすれば、

$$\begin{aligned} I &= (mc^2)^3 \theta_e^3 e^{-x} \\ &\times \int_{\frac{1}{\theta_e}}^\infty e^{-s} \left[(s+x)^2 + s^2 - \frac{2}{3}s(s+x) \right] \left[\ln(s(s+x)) + \ln \frac{2\theta_e}{x} - \frac{1}{2} \right] ds \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

となる。 $\frac{1}{\theta_e} \ll 1$ を用いて

$$\begin{aligned} I &\simeq (mc^2)^3 \theta_e^3 e^{-x} \\ &\times \int_0^\infty e^{-s} \left[2s^2 + 2sx + x^2 - \frac{2}{3}(s^2 + sx) \right] \left[\ln s + \ln(s+x) + \ln 2\theta_e - \ln x - \frac{1}{2} \right] ds \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

と表す事が出来る。電子 - 電子の超相対論近似の場合と同様に、それぞれの項に分解して積分を行っていく。

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-s} \left[2s^2 + 2sx + x^2 - \frac{2}{3}(s^2 + sx) \right] ds &= 2\Gamma(3) + 2x\Gamma(2) + x^2\Gamma(1) \\ &= 4 + 2x + x^2 \quad (\text{B.10}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-s} \left[2s^2 + 2sx + x^2 - \frac{2}{3}(s^2 + sx) \right] \ln s ds \\ &= 2\Gamma'(3) + 2x\Gamma'(2) + x^2\Gamma'(1) \\ &= 4 \left(-C + \frac{3}{2} \right) + 2x(-C + 1) - x^2C \\ &= -C(4 + 2x + x^2) + 6 + 2x \quad (\text{B.11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-s} \left[2s^2 + 2sx + x^2 - \frac{2}{3}(s^2 + sx) \right] \ln(s+x) ds \\ &= \left| [2f_2(s) + 2xf_1(s) + x^2f_0(s)] \ln(s+x) \right|_0^\infty - \int_0^\infty [2f_2(s) + 2xf_1(s) + x^2f_0(s)] \cdot \frac{1}{s+x} ds \\ &= (4 + 2x + x^2) \ln x + \int_0^\infty [2(s^2 + 2s + 2) + 2x(s+1) + x^2] \cdot \frac{1}{s+x} ds \quad (\text{B.12}) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
& [2(s^2 + 2s + 2) + 2x(s + 1) + x^2] \cdot \frac{1}{s + x} \\
&= 2(s - x + 2) + 2x + [2(x^2 - 2x + 2) + 2x(1 - x) + x^2] \cdot \frac{1}{s + x} \\
&= 2(s + 2) + (x^2 - 2x + 4) \cdot \frac{1}{s + x}
\end{aligned} \tag{B.13}$$

と変形すると、

$$\int_0^\infty e^{-s} (2s^2 + 2sx + x^2) \ln(s + x) ds = (4 + 2x + x^2) \ln x + 6 - (4 - 2x + x^2) e^x E_i(-x) \tag{B.14}$$

を得る。但し、 E_i 関数は

$$e^x E_i(-x) = - \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{s + x} dx \tag{B.15}$$

である。その他の積分についても以下の通りに計算した。

$$\int_0^\infty e^{-s} (s^2 + sx) ds = 2 + x \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-s} (s^2 + sx) \ln s ds &= \Gamma'(3) + x\Gamma'(2) \\
&= 2 \left(-C + \frac{3}{2} \right) + x(-C + 1) \\
&= -C(2 + x) + 3 + x
\end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty e^{-s} (s^2 + sx) \ln(s + x) ds \\
&= [(f_2(s) + xf_1(s)) \ln(s + x)]_0^\infty - \int_0^\infty (f_2(s) + xf_1(s)) \cdot \frac{1}{s + x} ds \\
&= (2 + x) \ln x + \int_0^\infty e^{-s} [s^2 + 2s + 2 + x(s + 1)] \cdot \frac{1}{s + x} ds \\
&= (2 + x) \ln x + \int_0^\infty e^{-s} [s - x + 2 + x + (2 - 2x + x^2 + x - x^2)] \cdot \frac{1}{s + x} ds \\
&= (2 + x) \ln x + \int_0^\infty e^{-s} \left[s + 2 + (2 - x) \cdot \frac{1}{s + x} \right] ds \\
&= (2 + x) \ln x + 3 - (2 - x) e^x E_i(-x)
\end{aligned} \tag{B.18}$$

以上より、計算をまとめると、

$$\begin{aligned}
I &= (mc^2)^3 \theta_e^3 e^{-x} \left\{ \left[4 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}(2+x) \right] \left[\ln x + \frac{1}{2} - \ln 2\theta_e \right] \right. \\
&\quad + \left[-C(4 + 2x + x^2) + 6 + 2x + \frac{2}{3}C(2+x) - 2 - \frac{2}{3}x \right] \\
&\quad \left. + \left[(4 + 2x + x^2) \ln x + 6 - (4 - 2x + x^2) e^x E_i(-x) - \frac{2}{3}(2+x) \ln x - 2 + \frac{2}{3}(2-x) e^x E_i(-x) \right] \right\} \\
&= (mc^2)^3 \theta_e^3 e^{-x} \left[\left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3}x + x^2 \right) \left(\ln 2\theta_e - \frac{1}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - C \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3}x + x^2 \right) + 4 + \frac{4}{3}x + 4 - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{3}x + x^2 \right) e^x E_i(-x) \right] \\
&= (mc^2)^3 \theta_e^3 e^{-x} \left[\left(\frac{20}{3} + \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3}x + x^2 \right) (\ln 2\theta_e - C) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{3}x + x^2 \right) e^x E_i(-x) \right] \\
&= \frac{1}{2} (mc^2)^3 \theta_e^3 e^{-x} \left[\left(\frac{40}{3} + \frac{4}{3}x - x^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + 2 \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3}x + x^2 \right) (\ln 2\theta_e - C) - 2 \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{3}x + x^2 \right) e^x E_i(-x) \right] \tag{B.19}
\end{aligned}$$

を得る。よって PPR は

$$\begin{aligned}
P_{ei}^{ER}(k, \theta_e) &= 2\alpha Z^2 r_0^2 n_i n_e \frac{c\theta_e}{K_2\left(\frac{1}{\theta_e}\right)} \frac{dk}{k} e^{-x} \left[\left(\frac{40}{3} + \frac{4}{3}x - x^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + 2 \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3}x + x^2 \right) (\ln 2\theta_e - C) - 2 \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{3}x + x^2 \right) e^x E_i(-x) \right] \tag{B.20}
\end{aligned}$$

となる。特に第二項目が超相対論的電子 - 電子熱制動放射と異なっている。

最後に $\frac{dN}{d\epsilon}$ を確認する。

$$\frac{dN}{d\epsilon} = A p \epsilon e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} \tag{B.21}$$

として、下記の計算を行う。

$$\int_{mc^2}^{\infty} \frac{dN}{d\epsilon} d\epsilon = A \frac{1}{c} (mc^2)^3 \int_1^{\infty} \epsilon \sqrt{\epsilon^2 - 1} e^{-\frac{\epsilon}{\theta_e}} d\epsilon \tag{B.22}$$

ここで、

$$\theta_e K_2\left(\frac{1}{\theta_e}\right) = \int_1^{\infty} \epsilon \sqrt{\epsilon^2 - 1} e^{-\frac{\epsilon}{\theta_e}} d\epsilon \tag{B.23}$$

を用いる。 K_2 は第二種ベッセル関数である。すると、

$$N = \frac{c}{(mc^2)^3 \theta_e K_2\left(\frac{1}{\theta_e}\right)} \tag{B.24}$$

とすれば

$$\int_{mc^2}^{\infty} \frac{dN}{d\epsilon} d\epsilon = 1 \tag{B.25}$$

を満たすので、

$$\frac{dN}{d\epsilon} = \frac{c}{(mc^2)^3 \theta_e K_2\left(\frac{1}{\theta_e}\right)} p \epsilon e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} \quad (\text{B.26})$$

を得る。確認の為、検算を行う。(5.31) 式で $pc \rightarrow \epsilon$, $\frac{\epsilon}{\theta_e} \rightarrow \epsilon$ とすると

$$\begin{aligned} \int_{mc^2}^{\infty} \frac{dN}{d\epsilon} d\epsilon &= \frac{1}{\theta_e K_2\left(\frac{1}{\theta_e}\right)} \int_1^{\infty} \epsilon^2 e^{-\frac{\epsilon}{\theta_e}} d\epsilon \\ &= \frac{\theta_e^2}{K_2\left(\frac{1}{\theta_e}\right)} \int_1^{\infty} \epsilon^2 e^{-\epsilon} d\epsilon \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

ここで超相対論近似を行い、 $\frac{1}{\theta_e} \ll 1$ より、

$$\begin{aligned} &\simeq \frac{\theta_e^2}{K_2\left(\frac{1}{\theta_e}\right)} \Gamma(3) \\ &= \frac{2\theta_e^2}{K_2\left(\frac{1}{\theta_e}\right)} = 1 \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

となり、(B.25) 式を満たしている事が確認できる。

•Emissivity

同様に Emissivity は

$$\begin{aligned} W_{ei}^{ER}(\theta_e) &= \int_0^{\infty} kP(k, \theta_e) dk \\ &= mc^2 \alpha Z^2 r_0^2 n_i n_e c \theta_e \int_0^{\infty} e^{-x} \left[\left(\frac{20}{3} + \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3}x + x^2 \right) (\ln 2\theta_e - C) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{3}x + x^2 \right) e^x E_i(-x) \right] dx \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

と表される。それぞれの積分は

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{20}{3} + \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx &= \frac{20}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot 2 \\ &= \frac{19}{3} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^x \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3}x + x^2 \right) dx &= \frac{8}{3} + \frac{4}{3} + 2 \\ &= 6 \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

$$\int_0^{\infty} E_i(-x) \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{3}x + x^2 \right) dx = -\frac{8}{3} \quad (\text{B.32})$$

より、まとめると

$$\begin{aligned} W_{ei}^{ER}(\theta_e) &= 2mc^2 \alpha Z^2 r_0^2 n_i n_e c \theta_e \left[\frac{19}{3} + \frac{8}{3} + 6(\ln 2\theta_e - C) \right] \\ &= 12mc^2 \alpha Z^2 r_0^2 n_i n_e c \theta_e \left(\frac{3}{2} + \ln 2\theta_e - C \right) \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

として Emissivity を求めることが出来る。

付録C 電子 - 電子熱制動放射超相対論近似の 導出

•PPR

まず、PPR は以下の式で与えられる。

$$P(\omega, \tau) d\omega = \frac{1}{4 \left[\tau e^{\frac{1}{\tau}} K_2 \left(\frac{1}{\tau} \right) \right]^2} \int_0^\infty \int_0^\infty dp_1 dp_2 p_1^2 p_2^2 \exp \left[- \left\{ (1 + p_1^2)^{\frac{1}{2}} + (1 + p_2^2)^{\frac{1}{2}} - 2 \right\} / \tau \right] \\ \times \int_{-1}^1 d\xi j_1 \cdot j_2 v \frac{d\sigma}{d\omega} d\omega \quad (C.1)$$

$$E_i = (1 + p_i \cdot p_i)^{\frac{1}{2}}, (i = 1, 2)$$

$$\xi = (\hat{p}_1 \cdot \hat{p}_2)$$

但し、 $j_1, j_2 = (\rho, v_\rho)$ は flux を表す 4 次元ベクトル、 p_1, p_2 は始 (終) 電子の 4 次元ベクトルである。

ここで、超相対論近似の場合、 $E \approx |\vec{p}|$ より、 $j_1 \cdot j_2 \approx n^2 (1 - \xi)$ 、 $v \approx 1$ 、 $\nu = (p_1 \cdot p_2) \approx E_1 E_2 (1 - \xi)$ であるから、

$$P(\omega, \tau) d\omega \approx \frac{n^2 e^{\frac{2}{\tau}}}{4 \left[\tau e^{\frac{1}{\tau}} K_2 \left(\frac{1}{\tau} \right) \right]^2} \int_\omega^\infty \int_0^\infty dE_1 dE_2 E_1^2 E_2^2 \exp \left[- (E_1 + E_2) / \tau \right] \int_{-1}^1 d\xi (1 - \xi) \frac{d\sigma}{d\omega} d\omega \quad (C.2)$$

と表す事が出来る。よって、

$$\frac{d\sigma}{d\omega} d\omega = 4r_0^2 \alpha \frac{d\omega}{\omega} \frac{E_1 - \omega}{E_1} \left(\frac{E_1}{E_1 - \omega} + \frac{E_1 - \omega}{E_1} - \frac{2}{3} \right) \times \left(\ln 2\nu \frac{E_1 - \omega}{\omega} - \frac{1}{2} \right) + (1 \leftrightarrow 2) \quad (C.3)$$

を (C.3) 式に代入して、

$$P(\omega, \tau) d\omega = \frac{n^2 e^{\frac{2}{\tau}}}{4 \left[\tau e^{\frac{1}{\tau}} K_2 \left(\frac{1}{\tau} \right) \right]^2} \int_\omega^\infty \int_0^\infty dE_1 dE_2 E_1^2 E_2^2 \exp \left[- (E_1 + E_2) / \tau \right] \int_{-1}^1 d\xi (1 - \xi) \\ \times 4r_0^2 \alpha \frac{d\omega}{\omega} \left[\frac{E_1 - \omega}{E_1} \left(\frac{E_1}{E_1 - \omega} + \frac{E_1 - \omega}{E_1} - \frac{2}{3} \right) \times \left(\ln 2\nu \frac{E_1 - \omega}{\omega} - \frac{1}{2} \right) + (1 \leftrightarrow 2) \right] \\ = \frac{n^2 r_0^2 \alpha e^{\frac{2}{\tau}}}{\left[\tau e^{\frac{1}{\tau}} K_2 \left(\frac{1}{\tau} \right) \right]^2} \frac{d\omega}{\omega} \int_\omega^\infty \int_0^\infty dE_1 dE_2 E_1^2 E_2^2 \exp \left[- (E_1 + E_2) / \tau \right] \int_{-1}^1 d\xi (1 - \xi) \\ \times \left[\frac{E_1 - \omega}{E_1} \left(\frac{E_1}{E_1 - \omega} + \frac{E_1 - \omega}{E_1} - \frac{2}{3} \right) \times \left(\ln 2\nu \frac{E_1 - \omega}{\omega} - \frac{1}{2} \right) + (1 \leftrightarrow 2) \right] \quad (C.4)$$

を得る。また、 $\frac{E_1}{\tau} \rightarrow s_1, \frac{E_2}{\tau} \rightarrow s_2, \frac{\omega}{\tau} = x$ とおくと、 $\nu \rightarrow \tau^2 s_1 s_2 (1 - \xi)$ となり、 $\frac{1}{\tau} \ll 1$ の時、 $e^{\frac{2}{\tau}\tau^6} / \left[\tau e^{\frac{1}{\tau}} K_2 \left(\frac{1}{\tau} \right) \right]^2 \approx \frac{1}{4}$ となるので、

$$P(\omega, \tau) d\omega = \frac{1}{4} n^2 \alpha r_0^2 \frac{d\omega}{\omega} \int_x^\infty \int_0^\infty ds_1 ds_2 s_1^2 s_2^2 \exp[-(s_1 + s_2)] \int_{-1}^1 d\xi (1 - \xi) \left[\frac{s_1 - x}{s_1} \right. \\ \times \left(\frac{s_1}{s_1 - x} + \frac{s_1 - x}{s_1} - \frac{2}{3} \right) \left\{ \ln \frac{s_1 - x}{x} + \ln s_1 + \ln s_2 + \ln 2\tau^2 + \ln(1 - \xi) - \frac{1}{2} \right\} \\ \left. + (1 \leftrightarrow 2) \right] \quad (C.5)$$

となる。更に、

$$\int_{-1}^1 d\xi (1 - \xi) = \left[\left(\xi - \frac{1}{2}\xi^2 \right) \right]_{-1}^1 = 2 \\ \int_{-1}^1 d\xi (1 - \xi) \ln(1 - \xi) = - \left[\frac{1}{2} (1 - \xi)^2 \ln(1 - \xi) \right]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\xi (1 - \xi) \\ = 2 \ln 2 - 1$$

を用いて、

$$P(\omega, \tau) d\omega = \frac{1}{4} n^2 \alpha r_0^2 \frac{d\omega}{\omega} \int_x^\infty \int_0^\infty ds_1 ds_2 s_1^2 s_2^2 \exp[-(s_1 + s_2)] \left[\frac{s_1 - x}{s_1} \right. \\ \times \left(\frac{s_1}{s_1 - x} + \frac{s_1 - x}{s_1} - \frac{2}{3} \right) \left\{ \ln \frac{s_1 - x}{x} + \ln s_1 + \ln s_2 + \ln 2\tau^2 + \ln(2\tau^2) - 1 \right\} \\ \left. + (1 \leftrightarrow 2) \right] \quad (C.6)$$

とする事が出来る。次に、積分計算に移る。積分計算にあたり、 Γ 関数を用いた以下の関数を用いる事とする。

$$\int_0^\infty e^{-s} s^n ds = \Gamma(n + 1) \\ \int_0^\infty e^{-s} s^n \ln s ds = \Gamma'(n + 1) = \Gamma(n + 1) \left(-C + \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} \right)$$

また、

$$\int e^{-s} s^2 ds = e^{-s} s^2 + 2 \int e^{-s} s ds = e^{-s} s^2 - 2e^{-s} s - 2e^{-s} \equiv f_2(s) \quad (C.7)$$

$$\int e^{-s} s ds = -e^{-s} s - e^{-s} \equiv f_1(s) \quad (C.8)$$

$$\int e^{-s} ds = -e^{-s} \equiv f_0(s) \quad (C.9)$$

を定義した。

(1 \leftrightarrow 2) で同じ寄与があることから、

$$P(\omega, \tau) d\omega = 2n^2 \alpha r_0^2 \frac{d\omega}{\omega} \int_x^\infty ds_1 s_1^2 \exp(-s_1) \left[\frac{s_1 - x}{s_1} \right. \\ \times \left(\frac{s_1}{s_1 - x} + \frac{s_1 - x}{s_1} - \frac{2}{3} \right) \left\{ \ln \frac{s_1 - x}{x} + \ln s_1 + 2 \ln 2\tau - C + \frac{1}{2} \right\} \left. \right] \quad (C.10)$$

となる。但し、 C はオイラー定数である。更に、 $s_1 - x = s$ とおけば、

$$\begin{aligned}
P(\omega, \tau) d\omega &= 2n^2 \alpha r_0^2 \frac{d\omega}{\omega} \int_x^\infty ds (s+x)^2 \exp(-s) \\
&\quad \times \frac{s}{s+x} \left(\frac{s+x}{s} + \frac{s}{s+x} - \frac{2}{3} \right) \left\{ \ln \frac{s}{x} + \ln(s+x) + 2 \ln 2\tau - C + \frac{1}{2} \right\} \\
&= 2n^2 \alpha r_0^2 \frac{d\omega}{\omega} e^{-x} \int_0^\infty ds e^{-s} \left[(s+x)^2 + s^2 - \frac{2}{3}s(s+x) \right] \\
&\quad \times \left\{ \ln \frac{s}{x} + \ln(s+x) + 2 \ln 2\tau - C + \frac{1}{2} \right\} \tag{C.11}
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
\left[(s+x)^2 + s^2 - \frac{2}{3}s(s+x) \right] &= s^2 + 2sx + x^2 + s^2 - \frac{2}{3}s^2 - \frac{2}{3}sx \\
&= \frac{4}{3}s^2 + \frac{4}{3}sx + x^2 \tag{C.12}
\end{aligned}$$

より、

$$P(\omega, \tau) d\omega = 2n^2 \alpha r_0^2 \frac{d\omega}{\omega} e^{-x} \int_0^\infty ds e^{-s} \left[\frac{4}{3}s^2 + \frac{4}{3}sx + x^2 \right] \left\{ \ln \frac{s}{x} + \ln(s+x) + 2 \ln 2\tau - C + \frac{1}{2} \right\} \tag{C.13}$$

を得る。

以上をふまえて積分を行っていく。被積分関数を項によって分解し、関数形それぞれに分けて計算を行った。

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-s} \left(\frac{4}{3}s^2 + \frac{4}{3}sx + x^2 \right) ds &= \frac{4}{3}\Gamma(3) + \frac{4}{3}x\Gamma(2) + x^2\Gamma(1) \\
&= \frac{8}{3} + \frac{4}{3}x + x^2 \tag{C.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-s} \left(\frac{4}{3}s^2 + \frac{4}{3}sx + x^2 \right) \ln s ds &= \frac{4}{3}\Gamma'(3) + \frac{4}{3}x\Gamma'(2) + x^2\Gamma'(1) \\
&= \frac{8}{3} \left(-C + \frac{3}{2} \right) + \frac{4}{3}x(-C+1) - x^2C \tag{C.15}
\end{aligned}$$

一方、

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-s} \left(\frac{4}{3}s^2 + \frac{4}{3}sx + x^2 \right) \ln(s+x) ds \\
&= \left[\left(\frac{4}{3}f_2(s) + \frac{4}{3}xf_1(s) + x^2f_0(s) \right) \ln(s+x) \right]_0^\infty \\
&\quad - \int_0^\infty \left(\frac{4}{3}f_2(s) + \frac{4}{3}xf_1(s) + x^2f_0(s) \right) \frac{1}{s+x} ds \\
&= \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3}x + x^2 \right) \ln x + \int_0^\infty e^{-x} \left[\frac{4}{3}(s^2 + 2s + s) + \frac{4}{3}x(s+1) + x^2 \right] \frac{1}{s+x} ds \tag{C.16}
\end{aligned}$$

である事より、

$$\begin{aligned}
(s^2 + 2s + s) \frac{1}{s+x} &= s - x + \frac{x^2}{s+x} + 2 - \frac{2x}{s+x} + \frac{2}{s+x} \\
&= s - x + 2 + (x^2 - 2x + 2) \frac{1}{s+x} \\
(s+1) \frac{1}{s+x} &= 1 - \frac{x}{s+x} + \frac{1}{s+x} \\
&= 1 + \frac{1-x}{s+x}
\end{aligned} \tag{C.17}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{4}{3} (s^2 + 2s + s) + \frac{4}{3} x (s+1) + x^2 \right] \frac{1}{s+x} \\
&= \frac{4}{3} s + \frac{4}{3} (2-x) + \frac{4}{3} x + \frac{1}{s+x} \left[\frac{4}{3} (x^2 - 2x + 2) + \frac{4}{3} x (1-x) + x^2 \right] \\
&= \frac{4}{3} s + \frac{8}{3} + \frac{1}{s+x} \left[\frac{8}{3} - \frac{4}{3} x + x^2 \right]
\end{aligned} \tag{C.18}$$

より、

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{4}{3} s^2 + \frac{4}{3} s x + x^2 \right) \ln(s+x) ds \\
&= \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3} x + x^2 \right) \ln x + 4 - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{3} x + x^2 \right) e^x E_i(-x)
\end{aligned} \tag{C.19}$$

となる。

以上の積分計算をまとめて、

$$\begin{aligned}
P(\omega, \tau) d\omega &= 2n^2 \alpha r_0^2 \frac{d\omega}{\omega} e^{-x} \\
&\times \left[- \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3} x + x^2 \right) C + 4 + \frac{4}{3} x + \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3} x + x^2 \right) \ln x + 4 - \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3} x + x^2 \right) \right. \\
&\quad \left. \times e^x E_i(-x) + \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3} x + x^2 \right) \left\{ -\ln x + 2 \ln 2\tau - C + \frac{1}{2} \right\} \right] \\
&= 2n^2 \alpha r_0^2 \frac{d\omega}{\omega} e^{-x} \\
&\times \left[8 + \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3} x \right) x + \frac{1}{2} x^2 + 2 \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3} x + x^2 \right) (\ln 2\tau - C) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3} x + x^2 \right) e^x E_i(-x) \right] \\
&= 2n^2 \alpha r_0^2 \frac{d\omega}{\omega} e^{-x} \left[\frac{28}{3} + 2x + \frac{1}{2} x^2 \right. \\
&\quad \left. + 2 \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3} x + x^2 \right) (\ln 2\tau - C) - \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3} x + x^2 \right) e^x E_i(-x) \right]
\end{aligned} \tag{C.20}$$

となる。これは Alexanian(1968) の超相対論近似 PPR と一致する。

•Emissivity

Emissivity を求める為に、単位体積・単位時間あたりのエネルギー放射として以下の量を求める。

$$\begin{aligned}
 E_{ee}(\omega, \tau) &= \int_0^\omega \omega' P_{ee}(\omega', \tau) d\omega' \\
 &= 2n^2 \alpha r_0^2 \tau \int_0^\infty e^{-s} \left[\frac{28}{3} + 2s + \frac{1}{2}s^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3}s + s^2 \right) (\ln 2\tau - C) - \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3}s + s^2 \right) e^s E_i(-s) \right] ds \quad (C.21)
 \end{aligned}$$

また、PPR と同様に先に以下の積分を求めた。

$$\int_0^x e^{-s} s^2 ds = 2 - e^{-x} (x^2 + 2x + 2) \quad (C.22)$$

$$\int_0^x e^{-s} s ds = 1 - e^{-x} (x + 1) \quad (C.23)$$

$$\int_0^x e^{-s} ds = 1 - e^{-x} \quad (C.24)$$

これらをふまえて計算を行っていく。

$$\begin{aligned}
 \int_0^x e^{-s} \left(\frac{28}{3} + 2s + \frac{1}{2}s^2 \right) ds &= \frac{28}{3} + 2 + 1 - e^{-x} \left\{ \frac{28}{3} + 2(x + 1) + \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2) \right\} \\
 &= \frac{37}{3} - e^{-x} \left(\frac{37}{3} + 3x + \frac{1}{2}x^2 \right) \\
 \int_0^x e^{-s} \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3}s + s^2 \right) ds &= \frac{8}{3} + \frac{4}{3} + 2 - e^{-x} \left[\frac{8}{3} + \frac{4}{3}(x + 1) + (x^2 + 2x + 2) \right] \\
 &= 6 - e^{-x} \left(6 + \frac{10}{3}x + x^2 \right) \quad (C.25)
 \end{aligned}$$

ところで、 E_i 関数について、

$$\int E_i(-s) s^n ds = \frac{1}{n+1} E_i(-s) s^{n+1} - \frac{1}{n+1} \int E_i'(-s) s^{n+1} ds \quad (C.26)$$

$$E_i(-x) = \int_x^\infty dt \frac{e^{-t}}{t}, E_i'(-s) = \frac{e^{-s}}{s}$$

より、

$$\int E_i(-s) s^n ds = \frac{1}{n+1} E_i(-s) s^{n+1} - \frac{1}{n+1} \int e^{-s} s^n ds \quad (C.27)$$

を用いる。よって、

$$\begin{aligned}
 \int_0^x E_i(-s) s^2 ds &= \frac{1}{3} E_i(-x) x^3 - \frac{1}{3} \int e^{-s} s^2 ds \\
 &= \frac{1}{3} E_i(-x) x^3 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^{-x} (2 + 2x + x^2) \quad (C.28)
 \end{aligned}$$

$$\int_0^x E_i(-s) s ds = \frac{1}{2} E_i(-x) x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-x} (1 + x) \quad (C.29)$$

$$\int_0^x E_i(-s) ds = E_i(-x) x - 1 + e^{-x} \quad (C.30)$$

となり、

$$\begin{aligned}
& \int_0^x E_i(-s) \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3}s + s^2 \right) ds \\
&= x E_i(-x) \left(\frac{8}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2 \right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) + e^{-x} \left[\frac{8}{3} - \frac{2}{3}(1+x) + \frac{1}{3}(2+2x+x^2) \right] \\
&= x E_i(-x) \left(\frac{8}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2 \right) - \frac{8}{3} + e^{-x} \left[\frac{8}{3} + \frac{1}{3}x^2 \right] \tag{C.31}
\end{aligned}$$

を得る。以上より、

$$\begin{aligned}
E_{ee}(\omega, \tau) &= 2n^2 \alpha r_0^2 \tau \left[\frac{37}{3} - e^{-x} \left(\frac{37}{3} + 3x + \frac{1}{2}x^2 \right) + \left\{ 12 - e^{-x} \left(12 + \frac{20}{3}x + 2x^2 \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. \times (\ln 2\tau - C) - x E_i(-x) \left(\frac{8}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2 \right) + \frac{8}{3} - e^{-x} \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3}x^2 \right) \right] \\
&= 2n^2 \alpha r_0^2 \tau \left[15 + 12 \ln \frac{2\tau}{\gamma} - e^{-x} \left(15 + 3x + \frac{5}{6}x^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - e^{-x} \left(12 + \frac{20}{3}x + 2x^2 \right) \ln \frac{2\tau}{\gamma} - x E_i(-x) \left(\frac{8}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2 \right) \right] \tag{C.32}
\end{aligned}$$

を得た。但し、 $\gamma = e^C$ である。この結果から全エネルギー放射である Emissivity を求めるには、 $x \rightarrow \infty$ の極限を取ればよいので、

$$\begin{aligned}
W_{ee}(\tau) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} E_{ee}(\omega, \tau) \\
&= 2n^2 \alpha r_0^2 \tau \left(15 + 12 \ln \frac{2\tau}{\gamma} \right) \\
&= 24n^2 r_0^2 \alpha \tau \left(\ln \frac{2\tau}{\gamma} + \frac{5}{4} \right) \tag{C.33}
\end{aligned}$$

となる。

付録D PPR計算プログラム

```
PROGRAM E E Bremss MAIN
IMPLICIT NONE
REAL*8 X,TAU
REAL*8 Xini,Xfin,dX
REAL*8 Ael,Anel
REAL*8 AA,BB,CC,DTAU
INTEGER i,Iini,Ifin,II,IIfin,iX,iXfin
DIMENSION AA(2000,49),BB(2000,49),CC(2000),DTAU(49)
DATA DTAU/
& 1D0,2.5D0,5D0,7.5D0,10D0,25D0,40D0,50D0,
& 75D0,100D0,150D0,200D0,300D0,400D0,500D0,
& 600D0,700D0,800D0,900D0,1000D0,
& 1100D0,1200D0,1300D0,1400D0,1500D0,
& 1600D0,1700D0,1800D0,1900D0,2000D0,
& 2200D0,2400D0,2500D0,2800D0,3000D0,
& 3200D0,3400D0,3500D0,3800D0,4000D0,
& 4200D0,4400D0,4500D0,4800D0,5000D0,
& 5500D0,6000D0,6500D0,7000D0/
OPEN (10,file='E1-out1.csv',status='unknown')
OPEN (20,file='NE1-out1.csv',status='unknown')
Iini=1
Ifin=1
II=0
IIfin=Ifin-Iini+1

DO 200 i=Iini,Ifin
iX=0
II=II+1
TAU=DTAU(i)/511D0

Xini=1D-3
Xfin=1D-2
dX=1D-3
DO 100 X=Xini,Xfin,dX
iX=iX+1
CALL Gx(X,TAU,Ael,Anel)
AA(iX,II)=Ael
BB(iX,II)=Anel
CC(iX)=X
100 CONTINUE

dX=5D-3
Xini=1D-2+dX
Xfin=5D-2
DO 110 X=Xini,Xfin,dX
iX=iX+1
CALL Gx(X,TAU,Ael,Anel)
AA(iX,II)=Ael
BB(iX,II)=Anel
CC(iX)=X
```

```
110 CONTINUE
200 CONTINUE
```

```
iXfin=iX
DO 310 iX=1,iXfin
WRITE(10,1000) CC(iX),(AA(iX,II),II=1,IIfin)
WRITE(20,1000) CC(iX),(BB(iX,II),II=1,IIfin)
310 CONTINUE
```

```
CLOSE(10)
CLOSE(20)
1000 FORMAT(f10.5 ,',', <Iifin-Iini+1>(f30.15,','))
END
```

```
SUBROUTINE Gx(X,TAU,Ae1,Ane1)
IMPLICIT NONE
REAL*8 IPS1,IPS2,K
REAL*8 x1,x2,X,XXX
REAL*8 OMEGA2,OMEGA,ROW2,ROW
REAL*8 DE1,DK,DCON2,BESSK2
REAL*8 CON1,CON2
REAL*8 p1p23,p1p24,p3p44
REAL*8 ALFA,PI
REAL*8 SIGMA,TAU,DTAU,TT,IPS
REAL*8 F,F12,F21,G
REAL*8 s,t,s1,s2
REAL*8 MYUmin,MYUmax,MYU1,MYU2,MYUK,MYU
REAL*8 Fmin,Fmax,FAI,FAI1,FAI2
REAL*8 SITmax,SIT,SIT1,SIT2
REAL*8 A,B1,B2
REAL*8 XS,XT,XM,XSIT,XF
REAL*8 WS,WT,WM,WSIT,WF
REAL*8 ANS1,SUM1,Ae1
REAL*8 ANS2,SUM2,Ane1
REAL*8 F2,F4
REAL*8 y,J,E1,yd
REAL*8 A1,A2,AA1,AA2
REAL*8 Xini,Xfin,dX
INTEGER IX0,IX1,IX2,IX3,IX4
INTEGER iNDS,iNDT,iNDM,iNDSIT,iNDF
INTEGER i,iX,Iini,Iifin
INTEGER II,IIifin
      DIMENSION XS(100), WS(100), XT(100), WT(100), XM(100), WM(100),
&              XSIT(100), WSIT(100), XF(100), WF(100)
DATA iNDS,iNDT,iNDM,iNDSIT,iNDF/60,98,98,30,30/

PI=4D0*DATAN(1D0)
ALFA=1D0/137D0
CON1=1D0
CON2=3D0/(8D0*PI**2)*SQRT(TAU)
K=TAU*X
S1=K/TAU*(K-DSQRT(K**2+4D0*K)+3D0)/(2D0*DSQRT(K**2+4D0*K)+3D0)

CALL GAUSAB( XS, WS, ODO, 1D40, iNDS)
DO 540 IX4=1,iNDS
S=XS(IX4)
IPS=S*TAU+K+2D0
MYUK=1D0+K*((IPS-K)-DSQRT((IPS-K)**2-4D0))
```

```

IF (S>=S1) THEN
TT=IPS-2D0
ELSE IF (S<S1) THEN
TT=DSQRT((MYUK-1D0)/(MYUK+1D0)
&
*(IPS**2-2D0*(MYUK+1D0)))
END IF
CALL GAUSAB( XT, WT, -TT, TT, iNDT)
DO 530 IX3=1, iNDT
T=XT(IX3)

IPS1=(IPS+T)/2D0
IPS2=(IPS-T)/2D0

p1p23=DSQRT(IPS1**2-1D0)*DSQRT(IPS2**2-1D0)
MYUmin=IPS1*IPS2-p1p23
MYUmax=IPS1*IPS2+p1p23

CALL FUNCF(MYUmin, IPS, Fmin)
CALL FUNCF(MYUmax, IPS, Fmax)

IF (K<=Fmin) THEN
MYU1=MYUmin
MYU2=MYUmax
ELSE IF (K>Fmin .AND. K<=Fmax) THEN
MYU1=MYUK
MYU2=MYUmax
ELSE IF (K>Fmax) THEN
MYU1=MYUK
MYU2=1D0+K*((IPS-K)+DSQRT((IPS-K)**2-4D0))
END IF
CALL GAUSAB( XM, WM, MYU1, MYU2, iNDM)
DO 520 IX2=1, iNDM
MYU=XM(IX2)

A=DSQRT(2D0*(MYU-1D0)
&
*(IPS**2-2D0*(MYU+1D0))-2D0*(MYU+1D0)*T**2)
&
/(2D0*DSQRT(IPS**2-2D0*(MYU+1D0)))
B1=(IPS**2-2D0*(MYU+1D0)+IPS*T)
&
/(2D0*DSQRT(IPS**2-2D0*(MYU+1D0)))
B2=(IPS**2-2D0*(MYU+1D0)-IPS*T)
&
/(2D0*DSQRT(IPS**2-2D0*(MYU+1D0)))

CALL SMAX(IPS,MYU,K,SITmax)
SIT1=ODO
SIT2=SITmax
CALL GAUSAB( XSIT, WSIT, SIT1, SIT2, iNDSIT)

DO 510 IX1=1, iNDSIT
SIT=XSIT(IX1)

FAI1=ODO
FAI2=PI/2D0
CALL GAUSAB( XF, WF, FAI1, FAI2, iNDF)
DO 500 IX0=1, iNDF

FAI=XF(IX0)
x1=K*(IPS1-(A*DSIN(SIT)*DCOS(FAI)

```

```

      & +B1*DCOS(SIT))
x2=K*(IPS2-(-A*DSIN(SIT)*DCOS(FAI)
      & +B2*DCOS(SIT)))

p1p24=IPS1*IPS2-(-A*A+B1*B2)
p3p44=p1p24-x1-x2
OMEGA2=2D0*(p1p24+1D0)
ROW2=2D0*(p3p44+1D0)
OMEGA=DSQRT(OMEGA2)
ROW=DSQRT(ROW2)

CALL FUNCT(x1,x2,OMEGA2,ROW2,F12)
CALL FUNCT(x2,x1,OMEGA2,ROW2,F21)

A1=ALFA*(OMEGA2-2D0)
  & / (OMEGA*DSQRT(OMEGA2-4D0))
A2=ALFA*(ROW2-2D0)
  & / (ROW*DSQRT(ROW2-4D0))

AA1=2D0*PI*A1
AA2=2D0*PI*A2

E1=A2/A1
  & * ((DEXP(-AA2)-DEXP(-(AA1+AA2)))
  & / (DEXP(-AA1)-DEXP(-(AA1+AA2))))

F=(F12+F21)*E1*DSIN(SIT)
  & /DSQRT(2D0*(MYU+1D0-X1-X2))*DEXP(-S)

G=(F12+F21)*DSIN(SIT)
  & /DSQRT(2D0*(MYU+1D0-X1-X2))*DEXP(-S)

SUM1=SUM1+F*WF(IX0)*WSIT(IX1)
  & *WM(IX2)*WT(IX3)*WS(IX4)
SUM2=SUM2+G*WF(IX0)*WSIT(IX1)
  & *WM(IX2)*WT(IX3)*WS(IX4)

ANS1=SUM1
ANS2=SUM2
500 CONTINUE
510 CONTINUE
520 CONTINUE
530 CONTINUE
540 CONTINUE
Ae1=CON2/CON1*ANS1*K**2
  & / ((2D0*TAU*DEXP(1D0/TAU)*BESSK2(1D0/TAU))**2)
Ane1=CON2/CON1*ANS2*K**2
  & / ((2D0*TAU*DEXP(1D0/TAU)*BESSK2(1D0/TAU))**2)
SUM1=ODO
SUM2=ODO
RETURN
END

SUBROUTINE SMAX(IPS,MYU,K,SITmax)
IMPLICIT NONE
REAL*8 IPS,MYU,K,SITmax,SUB,PI
PI=4D0*DATAN(1D0)
SUB=(IPS-(MYU-1D0)/K)/(DSQRT(IPS**2-2D0*(MYU+1D0)))

```

```

IF (SUB>=-1D0) THEN
SITmax=DABS(DACOS(SUB))
ELSE
SITmax=PI
END IF
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE FUNCF(MYU,IPS,F)
IMPLICIT NONE
REAL*8 MYU,IPS,F
F=(MYU-1D0)/(IPS-DSQRT(IPS**2-2D0*(MYU+1D0)))
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE FUNCT(x1,x2,OMEGA2,ROW2,FUN)
IMPLICIT NONE
REAL*8 OMEGA,OMEGA2,ROW,ROW2
REAL*8 R1,R2
REAL*8 W2,W4
REAL*8 L,L1,L2,L3,L4
REAL*8 x,x1,x2
REAL*8 p1p2,p3p4
REAL*8 IPS1
REAL*8 FUN
REAL*8 A1,A2,A3,A4,A5

```

```

x=x1+x2
ROW=DSQRT(ROW2)
OMEGA=DSQRT(OMEGA2)

```

```

R1=ROW2-4D0+4D0*x1+4D0*x1**2/ROW2
R2=ROW2-4D0+2D0*x1

```

```

W2=DSQRT(x2*((ROW2-4D0)/4D0*x2+2D0*x*x1/ROW2))
W4=DSQRT((OMEGA2-4D0)*(1D0/4D0*(OMEGA2-4D0)
& *(ROW2-4D0)+4D0*x1*x2/ROW2))

```

```

L=DLOG(ROW/(4D0*x1)*(R2+DSQRT((ROW2-4D0)*R1)))
L1=DLOG((ROW+DSQRT(ROW2-4D0))/2D0)
L2=DLOG(1D0+ROW2/(4D0*x*x1)*((ROW2-4D0)*x2
& +2D0*DSQRT(ROW2-4D0)*W2))
L3=DLOG((OMEGA*DSQRT(ROW2-4D0)
& +ROW*DSQRT(OMEGA2-4D0))**2/(4D0*(OMEGA2-ROW2)))
L4=DLOG(1D0+ROW2/(8D0*x1*x2)*((OMEGA2-4D0)*(ROW2-4D0)
& +2D0*DSQRT(ROW2-4D0)*W4))

```

```

A1=
&DSQRT(ROW2-4D0)*((OMEGA2+ROW2)/(4D0*x1*x2)*((x1-x2)/x)**2-1D0/4D0
&*(1D0/x1-1D0/x2)**2-ROW2/(2D0*x**2)+2D0*ROW2/((OMEGA2-4D0)*x1*x2)
&*(1D0+1D0/(OMEGA2-4D0))
&+4D0*ROW2/(OMEGA2*(OMEGA2-4D0)*x1**4)*(3D0*(OMEGA2-2D0)**2
&/((OMEGA2-4D0)*x1*x2-2D0*x**2*(1D0+6D0/(OMEGA2*(OMEGA2-4D0))))
&-4D0*ROW2*x/((OMEGA2-4D0)*x1**3)
&+ROW2/x1**2*(4D0/OMEGA2-3D0/2D0-8D0/(OMEGA2*(OMEGA2-4D0)**2)
&+(OMEGA2-2D0)*x/(OMEGA2*(OMEGA2-4D0)))-ROW2/((OMEGA2-4D0)*x1)
&+1D0/R1*((OMEGA2-4D0*x2)/ROW2-OMEGA2*(OMEGA2-4D0)/(4D0*x1*x2)
&-4D0/x1

```

```

&+1D0/x1**2*(OMEGA2-(OMEGA2-2D0)/2D0*ROW2))
A2=
&+L/DSQRT(R1)*(4D0+1D0/x2*(1D0-OMEGA2/2D0)-2D0/x1*(2D0*OMEGA2-x2
&+4D0)+3D0*OMEGA2*(OMEGA2-4D0)/(4D0*x1*x2)
&+4D0/(x1*R2)*(x2-3D0*x1+4D0+2D0*(ROW2-3D0)/x1)+(OMEGA2-4D0-4D0*x1
&*x2/ROW2)/(x1*R1)*(OMEGA2*R2/(4D0*x2)-(ROW2-2D0)-2D0*x1))
A3=
&+ROW*L1*((ROW2+2D0)/x**2+8D0/x1**2)+L2/W2*(2D0*(OMEGA2-2D0)/x2
&-(ROW2-2D0-x2)/x1+(ROW2-2D0)/(2D0*x)*(ROW2+x1)+(OMEGA2-4D0)/R2
&-2D0+(ROW2-2D0)/(8D0*x*x1)*(OMEGA2+ROW2-4D0)**2+1D0/(R2*x1)
&*((ROW2-2D0)*((OMEGA2+ROW2)/2D0-2D0)*x2-(OMEGA2-2D0))
&-2D0*x2**2-4D0*x2)
&+1D0/(R2*x)*((ROW2-2D0)/2D0*(3D0*(ROW2-4D0)-OMEGA2*(ROW2-5D0))
&+2D0*x1**2-6D0*x1+(OMEGA2-2D0)*x2))
A4=
&+2D0*ROW*L3/(OMEGA*DSQRT(OMEGA2-4D0)*x1)*(4D0+8D0*(OMEGA2-2D0)
&/ (OMEGA2-4D0)**2-3D0*(OMEGA2-2D0)/(2D0*x2)+1D0/x1*(x2**2-2D0
&*OMEGA2-(OMEGA2-1D0)*x2+1D0/2D0*(OMEGA2-2D0)**2)
&+ROW2/(2D0*x)*(ROW2-2D0)-x2/(2D0*x)*(OMEGA2-2D0)-(OMEGA2+ROW2-4D0)
&/ (4D0*x*x2)*(OMEGA2-2D0)**2+x/(4D0*x1*x2)*((OMEGA2-2D0)**2
&+(ROW2-2D0)*(ROW2-4D0)-8D0*(ROW2-2D0)/(OMEGA2-4D0))+4D0*x**2
&/ (OMEGA2*(OMEGA2-4D0)*x1)-1D0/R2*(2D0*(ROW2-2D0)*x2+(OMEGA2-4D0)
&*x-4D0*(OMEGA2-2D0))
&+(8D0-ROW2)/(2D0*x1)*(OMEGA2-2D0))+1D0/(x*R2)*((ROW2-2D0)/2D0
&* (3D0*(ROW2-4D0)-OMEGA2*(ROW2-5D0))-x1*(OMEGA2-2D0*x1+4D0))
&+2D0/((OMEGA2-4D0)**2*x1)*(OMEGA2*(OMEGA2-2D0)*(ROW2-4D0)-2D0
&* (ROW2-2D0)+4D0*ROW2/OMEGA2)+4D0*(OMEGA2-2D0)*x/((OMEGA2-4D0)
&*x1**2)*(12D0*x/(OMEGA2*(OMEGA2-4D0))-(ROW2-2D0)/2D0)
&*(1D0-x/(OMEGA2*x1))
A5=
&-L4/W4*(1D0+(ROW2-2D0)/(8D0*x1*x2)*((OMEGA2-2D0)**2+(ROW2-2D0)**2
&-6D0*(OMEGA2+ROW2-4D0)+16D0*x/(OMEGA2-4D0))
&+2D0/(x1*x2)*(1D0-x1-x1**2)+1D0/(OMEGA2-4D0)*(ROW2-4D0-8D0
&/ (OMEGA2-4D0))

```

FUN=A1+A2+A3+A4+A5

RETURN

END

!-----第 2 種 0 次 Bessel 関数 K0(z)-----

```

FUNCTION bessk0(x)
REAL*8 bessk0,x
CU USES bessio
REAL*8 bessio
DOUBLE PRECISION p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,q1,q2,q3,q4,q5,q6,q7,y
SAVE p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,q1,q2,q3,q4,q5,q6,q7
DATA p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7/-0.57721566d0,0.42278420d0,0.23069756d0,
*0.3488590d-1,0.262698d-2,0.10750d-3,0.74d-5/
DATA q1,q2,q3,q4,q5,q6,q7/1.25331414d0,-0.7832358d-1,0.2189568d-1,
*-0.1062446d-1,0.587872d-2,-0.251540d-2,0.53208d-3/
if (x.le.2.0) then
y=x*x/4.0

```

```

    bessk0=(-log(x/2.0)*bessi0(x))+(p1+y*(p2+y*(p3+y*(p4+y*(p5+y*
*(p6+y*p7))))))
    else
        y=(2.0/x)
        bessk0=(exp(-x)/sqrt(x))*(q1+y*(q2+y*(q3+y*(q4+y*(q5+y*(q6+y*
*q7))))))
    endif
    return
END

```

!-----第 2 種 1 次 Bessel 関数 K1(z)-----

```

FUNCTION bessk1(x)
REAL*8 bessk1,x
CU  USES bessi1
REAL*8 bessi1
DOUBLE PRECISION p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,q1,q2,q3,q4,q5,q6,q7,y
SAVE p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,q1,q2,q3,q4,q5,q6,q7
DATA p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7/1.0d0,0.15443144d0,-0.67278579d0,
*-0.18156897d0,-0.1919402d-1,-0.110404d-2,-0.4686d-4/
DATA q1,q2,q3,q4,q5,q6,q7/1.25331414d0,0.23498619d0,-0.3655620d-1,
*0.1504268d-1,-0.780353d-2,0.325614d-2,-0.68245d-3/
if (x.le.2.0) then
    y=x*x/4.0
    bessk1=(log(x/2.0)*bessi1(x))+(1.0/x)*(p1+y*(p2+y*(p3+y*(p4+y*
*(p5+y*(p6+y*p7))))))
    else
        y=2.0/x
        bessk1=(exp(-x)/sqrt(x))*(q1+y*(q2+y*(q3+y*(q4+y*(q5+y*(q6+y*
*q7))))))
    endif
    return
END

```

!-----第 1 種 0 次 Bessel 関数 I0(z)-----

```

FUNCTION bessi0(x)
REAL*8 bessi0,x
REAL*8 ax
DOUBLE PRECISION p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,q1,q2,q3,q4,q5,q6,q7,q8,q9,y
SAVE p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,q1,q2,q3,q4,q5,q6,q7,q8,q9
DATA p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7/1.0d0,3.5156229d0,3.0899424d0,
*1.2067492d0,0.2659732d0,0.360768d-1,0.45813d-2/
DATA q1,q2,q3,q4,q5,q6,q7,q8,q9/0.39894228d0,0.1328592d-1,
*0.225319d-2,-0.157565d-2,0.916281d-2,-0.2057706d-1,0.2635537d-1,
*-0.1647633d-1,0.392377d-2/
if (abs(x).lt.3.75) then
    y=(x/3.75)**2
    bessi0=p1+y*(p2+y*(p3+y*(p4+y*(p5+y*(p6+y*p7))))))
    else
        ax=abs(x)
        y=3.75/ax
        bessi0=(exp(ax)/sqrt(ax))*(q1+y*(q2+y*(q3+y*(q4+y*(q5+y*(q6+y*
*(q7+y*(q8+y*q9)))))))))
    endif
    return
END

```

!-----第 1 種 1 次 Bessel 関数 I1(z)-----

```

FUNCTION bessi1(x)
REAL*8 bessi1,x
REAL*8 ax
DOUBLE PRECISION p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,q1,q2,q3,q4,q5,q6,q7,q8,q9,y

```



```

SAVE p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,q1,q2,q3,q4,q5,q6,q7,q8,q9
DATA p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7/0.5d0,0.87890594d0,0.51498869d0,
*0.15084934d0,0.2658733d-1,0.301532d-2,0.32411d-3/
DATA q1,q2,q3,q4,q5,q6,q7,q8,q9/0.39894228d0,-0.3988024d-1,
*-0.362018d-2,0.163801d-2,-0.1031555d-1,0.2282967d-1,-0.2895312d-1,
*0.1787654d-1,-0.420059d-2/
if (abs(x).lt.3.75) then
  y=(x/3.75)**2
  bess1=x*(p1+y*(p2+y*(p3+y*(p4+y*(p5+y*(p6+y*p7))))))
else
  ax=abs(x)
  y=3.75/ax
  bess1=(exp(ax)/sqrt(ax))*(q1+y*(q2+y*(q3+y*(q4+y*(q5+y*(q6+y*
*(q7+y*(q8+y*q9))))))))
  if(x.lt.0.)bess1=-bess1
endif
return
END
C-----bessel 関数 k2
FUNCTION bessk2(x)
REAL*8 bessk2,x
CU USES bessk1,bessk0
REAL*8 bessk1,bessk0
bessk2=2.D0*bessk1(x)/x+bessk0(x)
return
end
C
C=====
SUBROUTINE GAUSAB( X, W, A, B, NPT )
C=====
C /b
C Gaussian quadratures for | f(x)dx. NPT must be even & <100.
C /a
C
C=====
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
REAL*8 X(1), W(1)
REAL*8 XX, WW, C1, C2
COMMON / GAUSCM / XX(100), WW(100)
C-----
NPT2 = NPT/2
IF( A .EQ. 0. .AND. B .GT. .5E20 ) THEN
CALL GAUS(NPT,1)
DO 5 N = 1, NPT
X(N) = XX(N)
W(N) = WW(N)
5 CONTINUE
RETURN
END IF
CALL GAUS(NPT,0)

```

```

C1 = (B-A)/2.
C2 = (B+A)/2.

DO 10 N = 1, NPT2
M = NPT2 + 1 - N
X(N) = - XX(M)*C1 + C2
W(N) = WW(M)*C1
10 CONTINUE

DO 20 N = NPT2+1, NPT
M = N - NPT2
X(N) = XX(M)*C1 + C2
W(N) = WW(M)*C1
20 CONTINUE

RETURN

END

C=====
C      SUBROUTINE GAUS(NN,ITYPE)
C
C      STANDARD SETTINGS ARE: IALF=IBTA=0,0<NN<100,
C          ITYPE=0 : -1 TO +1 POINTS
C          ITYPE=1 : 0 TO INFINITY
C
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
C      DATA IALF, IBTA / 0, 0 /
C*****
C      GAUJAC COMPUTES GAUSS - JACOBI INTEGRATION WEIGHTS AND NODES
C*****
C
C      DIMENSION X(100),A(100),B(100),C(100)
C      DIMENSION XX(100), WW(100)
C      DIMENSION G(100)
C
C      COMMON/GAUSCM/XX,WW
C
C      PI=3.141592653589793238D0
C
C      ISUM=IALF+IBTA
C      IDIF=IBTA-IALF
C      FNUM=ISUM*IDIF
C      ALF=IALF
C      BTA=IBTA
C
C      CALCULATE COEFFICIENTS REQUIRED BY JACOBI
C
C      DO 20 I=1,100
C      I2=I+I
C      IM=I-1
C      DEN=(ISUM+I2)*(ISUM+I2-2)
C      IF(ISUM.EQ.0) GO TO 67
C      B(I)=FNUM/DEN
C      GO TO 68

```

```

67 B(I)=0.DO
68 FNUMP=4*IM*(IALF+IM)*(IBTA+IM)*(ISUM+IM)
DENP=(ISUM+I2-1)*(ISUM+I2-2)**2*(ISUM+I2-3)
IF(((ISUM.EQ.0).OR.(ISUM.EQ.1)).AND.(I.EQ.1)) GO TO 69
C(I)=FNUMP/DENP
GO TO 20
69 C(I)=0.DO
20 CONTINUE

```

```

C-----
C   For outputting quadratures
C-----
C   TYPE 34
C34  FORMAT(1X,'FILENAME FOR INTERMEDIATE RESULTS =? (A10)')
C   ACCEPT 35,FNAMX
C35  FORMAT(A10)
C   OPEN(UNIT=3,FILE=FNAMX,STATUS='NEW')
C-----

```

CALL JACOBI(NN,X,G,ALF,BTA,B,C,EPS,CSX,CSA,TSX,TSA)

```

C-----
C   For outputting quadratures
C-----
C   TYPE 70
C70  FORMAT(1X,'OUTPUT FILENAME ? (A10)')
C   ACCEPT 71,FNAM
C71  FORMAT(A10)
C   OPEN(UNIT=7,FILE=FNAM,STATUS='NEW')
C-----

```

```

C   OUTPUT DATA STATEMENT OF WEIGHTS AND NODES
C
IF(ITYPE.EQ.0) GO TO 130
DO 100 I=1,NN
II=NN+1-I
C   XX(I)=(1.0D+00+X(II))/(1.0D+00-X(II))
C   WW(I)=2.0D+00*G(II)/((1.0D+00-X(II))**(IALF+2))*
C   1   (1.0D+00+X(II))**IBTA)
ZZ=PI*(1.0D+00+X(II))/4.0D+00
XX(I)=SIN(ZZ)/COS(ZZ)
WW(I)=G(II)*PI*0.25D+00/(COS(0.25D+00*PI*(1.0D+00
1   +X(II))**2)

```

```

C-----
C   WRITE(7,120)I,I,XX(I),WW(I)
120  FORMAT(6X,6HDATA(,I2,6H,M),W(,I2,4H,M)/,D22.15,1H,,
1   D22.15,1H/)
C-----

```

```

100 CONTINUE
RETURN
130 CONTINUE
NI=NN/2
DO 140 I=1,NI
II=NI+1-I
XX(I)=X(II)
WW(I)=G(II)

```

```

C-----
C      WRITE(7,120)I,I,XX(I),WW(I)
C-----

140  CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE JACOBI(NN,X,A,ALF,BTA,B,C,EPS,CSX,CSA,TSX,TSA)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

C
C*****
C
C      CALCULATES THE ZEROS X(I) OF THE NN-TH ORDER JACOBI POLYNOMIAL
C      PN(ALF,BTA) FOR THE SEGMENT (-1,1)
C      THE LARGEST ZERO WILL BE STORED IN X(1).
C      ALSO CALCULATES THE CORRESPONDING COEFFICIENTS A(I) OF THE
C      NN-TH ORDER GAUSS-JACOBI QUADRATURE FORMULA OF DEGREE 2*NN-1.
C      THIS SUBROUTINE MUST BE GIVEN THE COEFFICIENTS:
C
C          (ALF+BTA) (BTA-ALF)
C      B(N) = -----
C          (ALF+BTA+2N) (ALF+BTA+2N-2)
C
C          4(N-1) (ALF+N-1) (BTA+N-1) (ALF+BTA+N-1)
C      C(N) = -----
C          (ALF+BTA+2N-1) (ALF+BTA+2N-2) **2 (ALF+BTA+2N-3)
C
C
C      IN THE RECURSION RELATION
C
C          P(N) = (X-B(N))*P(N-1)-C(N)*P(N-2)
C
C      FOR ALL N LESS THAN OR EQUAL TO THE HIGHEST DEGREE NN.
C
C          CSX = CALC SUM X(I)      TSX = TRUE SUM X(I)
C          CSA = CALC SUM A(I)      TSA = TRUE SUM A(I)
C
C*****
C
      DIMENSION X(100),A(100),B(100),C(100)
      FN=NN
      CSX=0.DO
      CSA=0.DO
      BETA=EXP(FLGAMA(ALF+1.DO)+FLGAMA(BTA+1.DO)-FLGAMA(ALF+BTA+2.DO))
      CC=2.**(ALF+BTA+1.)*BETA
      TSX=FN*(BTA-ALF)/(ALF+BTA+2.*FN)
      TSA=CC
      DO 1 J=2,NN
1      CC=CC*C(J)
      DO 12 I=1,NN
      IF(I-1)12,2,3
C          LARGEST ZERO
2      AN=ALF/FN
      BN=BTA/FN
      R1=(1.DO+ALF)*(2.78/(4.+FN*FN)+.768*AN/FN)
      R2=1.DO+1.48*AN+.96*BN+.452*AN*AN+.83*AN*BN
      XT=1.DO-R1/R2

```

```

      GO TO 11
3     IF(I-2)12,4,5
C     SECOND ZERO
4     R1=(4.1+ALF)/((1.+ALF)*(1.+156*ALF))
      R2=1.DO+.06*(FN-8.)*(1.DO+.12*ALF)/FN
      R3=1.DO+.012*BTA*(1.DO+.25*ABS(ALF))/FN
      RATIO=R1*R2*R3
      XT=XT-RATIO*(1.DO-XT)
      GO TO 11
5     IF(I-3) 12,6,7
C     THIRD ZERO
6     R1=(1.67+.28*ALF)/(1.DO+.37*ALF)
      R2=1.DO+.22*(FN-8.DO)/FN
      R3=1.DO+8.*BTA/((6.28DO+BTA)*FN*FN)
      RATIO=R1*R2*R3
      XT=XT-RATIO*(X(1)-XT)
      GO TO 11
7     IF(NN-I-1)10,9,8
C     MIDDLE ZEROS
8     XT=3.*X(I-1)-3.*X(I-2)+X(I-3)
      GO TO 11
C     SECOND LAST ZERO
9     R1=(1.DO+.235*BTA)/(.766DO+.119*BTA)
      R2=1./(1.DO+.639*(FN-4.DO)/(1.DO+.71*(FN-4.DO)))
      R3=1./(1.DO+20.*ALF/((7.5DO+ALF)*FN*FN))
      RATIO=R1*R2*R3
      XT=XT+RATIO*(XT-X(I-2))
      GO TO 11
C     LAST ZERO
10    R1=(1.DO+.37*BTA)/(1.67DO+.28*BTA)
      R2=1./(1.DO+.22*(FN-8.DO)/FN)
      R3=1./(1.DO+8.*ALF/((6.28DO+ALF)*FN*FN))
      RATIO=R1*R2*R3
      XT=XT+RATIO*(XT-X(I-2))
C
11    CALL GSRROOT(XT,NN,ALF,BTA,DPN,PN1,B,C,EPS)
      X(I)=XT
      A(I)=CC/(DPN*PN1)
C-----
C     WRITE(3,20)ALF,BTA,NN,I,XT,A(I)
C-----

      CSX=CSX+XT
      CSA=CSA+A(I)
12    CONTINUE

C-----
C     WRITE(3,22)CSX,CSA,TSX,TSA
20    FORMAT(1X,2F6.2,2I3,2(1X,D26.18),1X,(1X,D26.18))
22    FORMAT(1H0,/ ,5X,'CSX =' ,D25.18,5X,'CSA =' ,D25.18,/ ,
1 5X,'TSX =' ,D25.18,5X,'TSA =' ,D25.18)
C-----

      RETURN
      END
      SUBROUTINE GSRROOT(X,NN,ALF,BTA,DPN,PN1,B,C,EPS)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C

```

```

C*****
C
C   IMPROVES THE APPROXIMATE ROOT X
C   IN ADDITION WE ALSO OBTAIN:
C   DPN = DERIVATIVE OF P(N) AT X
C   PN1 = VALUE OF P(N-1) AT X
C
C*****
C
C   DIMENSION B(100),C(100)
C   ITER=0
1   ITER=ITER+1
C   CALL RECR(P,DP,PN1,X,NN,ALF,BTA,B,C)
C   D=P/DP
C   X=X-D
C   IF(ABS(D)-EPS)3,3,2
2   IF(ITER-10)1,3,3
3   DPN=DP
C   RETURN
C   END
C   SUBROUTINE RECR(PN,DPN,PN1,X,NN,ALF,BTA,B,C)
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
C   DIMENSION B(100),C(100)
C   P1=1.D0
C   P=X+(ALF-BTA)/(ALF+BTA+2.D0)
C   DP1=0.D0
C   DP=1.D0
C   DO 1 J=2,NN
C   Q=(X-B(J))*P-C(J)*P1
C   DQ=(X-B(J))*DP+P-C(J)*DP1
C   P1=P
C   P=Q
C   DP1=DQ
C   DP=DQ
1   CONTINUE
C   PN=P
C   DPN=DP
C   PN1=P1
C   RETURN
C   END
C   FUNCTION FLGAMA(W)
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
C*****
C
C   CALCULATES LOG(BASE E)GAMMA(W) FOR W REAL AND GAMMA(W) POSITIVE.
C   USES STIRLING'S APPROXIMATION
C   ACCURATE TO ABOUT 12 SIGNIFICANT PLACES
C
C*****
C
C   PI=3.141592653589793238D0
C   X=W
C   M=0
C   FK=-1.D0
C   IF(X-.5D0)1,1,2
C   W LESS EQ .5

```

```

1      M=1
      XPI=X*PI
      X=1.DO-X
2      FK=FK+1.DO
      IF(X+FK-6.DO)2,2,3
3      Z=X+FK
      ZZ=Z*Z
C      LOG GAMMA(Z), Z GREATER 6.
      Y=(Z-.5)*LOG(Z)-Z+.9189385332047+((((((-10861851./ZZ
1      +2356200.)/ZZ-704820.)/ZZ+309400.)/ZZ-218790.)/ZZ
2      +291720.)/ZZ-1021020.)/ZZ+30630600.)/Z/367567200.
      IF(FK)6,6,4
4      IK=FK
      DO 5 I=1,IK
      FK=FK-1.
5      Y=Y-LOG(X+FK)
6      IF(M)7,11,7
7      P=PI/SIN(XPI)
      IF(P)8,8,10
8      WRITE(6,9)W
9      FORMAT(2X,6HGAMMA(D11.4,13H) IS NEGATIVE)
      Y=0.
      GO TO 11
10     Y=LOG(P)-Y
11     FLGAMA=Y
      RETURN
      END

```

付録E Emissivity 計算プログラム

Emissivity は PPR 計算プログラムの Main パートを以下のように書き換える。それ以降は同様の計算プログラムによって計算する事が出来る。

```
PROGRAM E E Bremss MAIN
IMPLICIT NONE
REAL*8 X,TAU
REAL*8 Xini,Xfin,dX
REAL*8 Ael,Anel
REAL*8 AA,BB,CC,DTAU
REAL*8 XX,WX,SUM1,SUM2
INTEGER i,Iini,Ifin,II,IIfin,iX,iXfin
INTEGER iNDX,IXO
DIMENSION XX(98),WX(98)
DIMENSION AA(2000,49),BB(2000,49),CC(2000),DTAU(49)
DATA DTAU/
& 1D0,2.5D0,5D0,7.5D0,10D0,25D0,40D0,50D0,
& 75D0,100D0,150D0,200D0,300D0,400D0,500D0,
& 600D0,700D0,800D0,900D0,1000D0,
& 1100D0,1200D0,1300D0,1400D0,1500D0,
& 1600D0,1700D0,1800D0,1900D0,2000D0,
& 2200D0,2400D0,2500D0,2800D0,3000D0,
& 3200D0,3400D0,3500D0,3800D0,4000D0,
& 4200D0,4400D0,4500D0,4800D0,5000D0,
& 5500D0,6000D0,6500D0,7000D0/
OPEN (10,file='E1-out1.csv',status='unknown')
OPEN (20,file='NE1-out1.csv',status='unknown')

Iini=1
Ifin=1
iNDX=72

DO 200 i=Iini,Ifin
TAU=DTAU(i)/511D0

CALL GAUSAB( XX, WX, ODO, 1D40, iNDX)
DO 100 IXO=1,iNDX
X=XX(IXO)

iX=iX+1
CALL Gx(X,TAU,Ael,Anel)
SUM1=SUM1+Ael*DEXP(-X)*WX(IXO)
SUM2=SUM2+Anel*DEXP(-X)*WX(IXO)

100 CONTINUE
AA(i)=SUM1
BB(i)=SUM2

200 CONTINUE

DO 310 II=Iini,Ifin
```



```
TAU=DTAU(II)/511D0
WRITE(10,1000) TAU,(AA(i),i=Iini,Ifin)
WRITE(20,1000) TAU,(BB(i),i=Iini,Ifin)
310 CONTINUE

CLOSE(10)
CLOSE(20)
1000 FORMAT(f10.5 ,',', f30.15,','')
END
```

付録F PPRFitting計算プログラム

```

PROGRAM MAIN
    implicit real*8 (a-h, o-z)

    write(*,*)'-----'
    write(*,*)'Dimensionless Inputs:'
    write(*,*)'tau = kBT/mc^2 (50eV < kBT)      : the electron
        &thermal energy in units of the electron rest mass'
    write(*,*)' x = k/tau      (10^-4 < x < 10) : k is the photon energy in
        &units of the electron rest mass'
    write(*,*)'-----'
    100 write(*,*)'tau, x = ?'
    read(*,*) tau, x

    CALL FUNCFx(X,TAU,Peefit)

    write(*,*)'Peefit(x,tau)  =',Peefit
    write(*,*)'-----'
    GOTO 100
    END

SUBROUTINE FUNCFx(X,TAU,Peefit)
    IMPLICIT REAL*8 (A-Z)
    data pi, emass/ 3.141592654d0, 510.998902d0/

    IF (TAU.ge.(0.05D0/emass).and.TAU.lt.(1D0/emass)) THEN
        G=GI(x,tau)
    ELSE IF (TAU.ge.(1D0/emass).and.TAU.lt.(300D0/emass)) THEN
        G=GII(x,tau)*FCC(x,tau)
    ELSE IF (TAU.ge.(300D0/emass).and.TAU.le.(700D0/emass)) THEN
        G=GIII(x,tau)
    ELSE IF (TAU.gt.(700D0/emass)) THEN
        G=GIV(x,tau)
    END IF

    Peefit=1.455D-16*DEXP(-X)/X/DSQRT(TAU)*G

    RETURN
    END

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
C    Function GI(x, tau) returns the fitting function of Pee(x,tau).
C
C    GI(x, tau) = DSQRT( 8D0 / (3D0*PI) ) * Jfit
C
C    inputs: 50eV < tau < 1keV    (tau = KbT/mc^2)
C
CThis analytic fitting formula was obtained by Itoh, Kawana & Nozawa (2002a).
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

```

REAL FUNCTION GI*8(X,TAU)

implicit real*8(a-z)

real a(1:121)

data a/

```
$ 3.15847D0 , 2.46819D-2, -2.11118D-2, 1.24009D-2,
$ -5.41633D-3, 1.70070D-3, -3.05111D-4, -1.21721D-4,
$ 1.77611D-4, -2.05480D-5, -3.58754D-5,
$ -2.52430D0 , 1.03924D-1, -8.53821D-2, 4.73623D-2,
$ -1.91406D-2, 5.39773D-3, -7.26681D-4, -7.47266D-4,
$ 8.73517D-4, -6.92284D-5, -1.80305D-4,
$ 4.04877D-1, 1.98935D-1, -1.52444D-1, 7.51656D-2,
$ -2.58034D-2, 4.13361D-3, 4.67015D-3, -2.20675D-3,
$ -2.67582D-3, 2.95254D-5, 1.40751D-3,
$ 6.13466D-1, 2.18843D-1, -1.45660D-1, 5.07201D-2,
$ -2.23048D-3, -1.14273D-2, 1.24789D-2, -2.74351D-3,
$ -4.57871D-3, -1.70374D-4, 2.06757D-3,
$ 6.28867D-1, 1.20482D-1, -4.63705D-2, -2.25247D-2,
$ 5.07325D-2, -3.23280D-2, -1.16976D-2, -1.00402D-3,
$ 2.96622D-2, -5.43191D-4, -1.23098D-2,
$ 3.29441D-1, -4.82390D-2, 8.16592D-2, -8.17151D-2,
$ 5.94414D-2, -2.19399D-2, -1.13488D-2, -2.38863D-3,
$ 1.89850D-2, 2.50978D-3, -8.81767D-3,
$ -1.71486D-1, -1.20811D-1, 9.87296D-2, -4.59297D-2,
$ -2.11247D-2, 1.76310D-2, 6.31446D-2, -2.28987D-3,
$ -8.84093D-2, 4.45570D-3, 3.46210D-2,
$ -3.68685D-1, -4.46133D-4, -3.24743D-2, 5.05096D-2,
$ -5.05387D-2, 2.23352D-2, 1.33830D-2, 7.79323D-3,
$ -2.93629D-2, -2.80083D-3, 1.23727D-2,
$ -7.59200D-2, 8.88749D-2, -8.82637D-2, 5.58818D-2,
$ 9.20453D-3, -4.59817D-3, -8.54735D-2, 7.98332D-3,
$ 1.02966D-1, -5.68093D-3, -4.04801D-2,
$ 1.60187D-1, 2.50320D-2, -7.52221D-3, -9.11885D-3,
$ 1.67321D-2, -8.24286D-3, -6.47349D-3, -3.80435D-3,
$ 1.38957D-2, 1.10618D-3, -5.68689D-3,
$ 8.37729D-2, -1.28900D-2, 1.99419D-2, -1.71348D-2,
$ -3.47663D-3, -3.90032D-4, 3.72266D-2, -4.25035D-3,
$ -4.22093D-2, 2.33625D-3, 1.66733D-2/
```

data pi, emass/ 3.141592654d0, 510.998902d0/

logth=LOG10(TAU)

log u=LOG10(X)

the = (logth+2.65)/1.35

u = (logu+1.50)/2.50

```
jfit =(A(1)+A(2)*the+A(3)*the**2+A(4)*the**3+A(5)*the**4
* +A(6)*the**5+A(7)*the**6+A(8)*the**7
* +A(9)*the**8+A(10)*the**9+A(11)*the**10)

* +A(12)+A(13)*the+A(14)*the**2+A(15)*the**3+A(16)*the**4
* +A(17)*the**5+A(18)*the**6+A(19)*the**7
* +A(20)*the**8+A(21)*the**9+A(22)*the**10)*u

* +A(23)+A(24)*the+A(25)*the**2+A(26)*the**3+A(27)*the**4
* +A(28)*the**5+A(29)*the**6+A(30)*the**7
* +A(31)*the**8+A(32)*the**9+A(33)*the**10)*u**(+2)
```

```

*      +(A(34)+A(35)*the+A(36)*the**2+A(37)*the**3+A(38)*the**4
*      +A(39)*the**5+A(40)*the**6+A(41)*the**7
*      +A(42)*the**8+A(43)*the**9+A(44)*the**10)*u**(+3)

*      +(A(45)+A(46)*the+A(47)*the**2+A(48)*the**3+A(49)*the**4
*      +A(50)*the**5+A(51)*the**6+A(52)*the**7
*      +A(53)*the**8+A(54)*the**9+A(55)*the**10)*u**(+4)

*      +(A(56)+A(57)*the+A(58)*the**2+A(59)*the**3+A(60)*the**4
*      +A(61)*the**5+A(62)*the**6+A(63)*the**7
*      +A(64)*the**8+A(65)*the**9+A(66)*the**10)*u**(+5)

*      +(A(67)+A(68)*the+A(69)*the**2+A(70)*the**3+A(71)*the**4
*      +A(72)*the**5+A(73)*the**6+A(74)*the**7
*      +A(75)*the**8+A(76)*the**9+A(77)*the**10)*u**(+6)

*      +(A(78)+A(79)*the+A(80)*the**2+A(81)*the**3+A(82)*the**4
*      +A(83)*the**5+A(84)*the**6+A(85)*the**7
*      +A(86)*the**8+A(87)*the**9+A(88)*the**10)*u**(+7)

*      +(A(89)+A(90)*the+A(91)*the**2+A(92)*the**3+A(93)*the**4
*      +A(94)*the**5+A(95)*the**6+A(96)*the**7
*      +A(97)*the**8+A(98)*the**9+A(99)*the**10)*u**(+8)

*      +(A(100)+A(101)*the+A(102)*the**2+A(103)*the**3+A(104)*the**4
*      +A(105)*the**5+A(106)*the**6+A(107)*the**7
*      +A(108)*the**8+A(109)*the**9+A(110)*the**10)*u**(+9)

*      +(A(111)+A(112)*the+A(113)*the**2+A(114)*the**3+A(115)*the**4
*      +A(116)*the**5+A(117)*the**6+A(118)*the**7
*      +A(119)*the**8+A(120)*the**9+A(121)*the**10)*u**(+10)

```

```
GI=DSQRT(8D0/(3D0*PI))*jfit
```

```

return
end

```

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

```

C
C      Function GII(x, tau) returns the fitting function of Pee(x,tau).
C

```

```

C      GII(x, tau) =  AA2*x^2 + AA1*x + AA0*x
C                    - EXP(x) * Ei(-x) * ( BB1*x + BB0*x )
C

```

```

C      AA2(tau) = A2(0) + A2(1)*tau^(1/8) + A2(2)*tau^(2/8) + A2(3)*tau^(3/8)
C                  + A2(4)*tau^(4/8) + A2(5)*tau^(5/8) + A2(6)*tau^(6/8)
C                  + A2(7)*tau^(7/8) + A2(8)*tau^(8/8)
C

```

```

C      Same function forms for AA1(tau), AA0(tau), BB1(tau) and BB0(tau).
C

```

```

C      inputs: 1keV < tau < 300keV (tau = KbT/mc^2)
C

```

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

```

real function GII*8(x, tau)
implicit real*8 (a-h, o-z)
real*8 A2(0:8), A1(0:8), A0(0:8), B1(0:8), B0(0:8)

```

```
data pi, emass/ 3.141592654d0, 510.998902d0/
```

```

data A2/    0.9217D0,   -13.4988D0,    76.4539D0,   -217.8301D0,
&          320.9753D0,  -188.0667D0,   -82.4161D0,   163.7191D0,
&          -60.0248D0/
data A1/   -9.3647D0,    95.9186D0,   -397.0172D0,   842.9376D0,
&          -907.3076D0,   306.8802D0,   291.2983D0,  -299.0253D0,
&          76.3461D0/
data A0/   -37.3698D0,   380.3659D0, -1489.8014D0,  2861.4150D0,
&          -2326.3704D0, -691.6118D0,  2853.7893D0, -2040.7952D0,
&          492.5981D0/
data B1/   -8.6991D0,    63.3830D0,  -128.8939D0,  -135.0312D0,
&          977.5838D0, -1649.9529D0,  1258.6812D0,  -404.7461D0,
&          27.3354D0/
data B0/  -11.6281D0,   125.6066D0, -532.7489D0,  1142.3873D0,
&          -1156.8545D0,   75.0102D0,   996.8114D0,  -888.1895D0,
&          250.1386D0/

```

```

AA2=OD0
AA1=OD0
AA0=OD0
BB1=OD0
BB0=OD0

```

```

CALL FUNCE(X,Ei)
do 10 i = 0, 8
AA2 = AA2 + A2(i)*tau**(i/8.d0)
AA1 = AA1 + A1(i)*tau**(i/8.d0)
AA0 = AA0 + A0(i)*tau**(i/8.d0)
BB1 = BB1 + B1(i)*tau**(i/8.d0)
BB0 = BB0 + B0(i)*tau**(i/8.d0)
10 continue

```

```

GII=AA2*X**2+AA1*X+AA0-DEXP(X)*Ei*(BB1*X+BB0)

```

```

return
end

```

```

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

```

```

C
C   Function GIII(x, tau) returns the fitting function of Pee(x,tau).
C
C   GIII(x, tau) =   AA2*x^2 + AA1*x + AA0*x
C                   - EXP(x) * Ei(-x) * ( BB1*x + BB0*x )
C
C   AA2(tau) = A2(0) + A2(1)*tau^(1/8) + A2(2)*tau^(2/8) + A2(3)*tau^(3/8)
C               + A2(4)*tau^(4/8) + A2(5)*tau^(5/8) + A2(6)*tau^(6/8)
C               + A2(7)*tau^(7/8) + A2(8)*tau^(8/8)
C
C   Same function forms for AA1(tau), AA0(tau), BB1(tau) and BB0(tau).
C
C   inputs: 300keV < tau < 7MeV (tau = kBT/mc^2)
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

```

```

real function GIII*8(x, tau)
implicit real*8 (a-h, o-z)
real*8 A2(0:8), A1(0:8), A0(0:8), B1(0:8), B0(0:8)
data pi, emass/ 3.141592654d0, 510.998902d0/
data A2/    64.7512D0,  -213.8956D0,   174.1432D0,   136.5088D0,

```

```

&      -271.4899D0,   89.3210D0,   58.2584D0,   -46.0807D0,
&      8.7301D0/
data A1/  49.7139D0, -189.7746D0,  271.0298D0, -269.7807D0,
&      420.4812D0, -576.6247D0,  432.7790D0, -160.5365D0,
&      23.3925D0/
data A0/  52.1633D0, -257.0313D0,  446.8161D0, -293.0585D0,
&      0.0000D0,   77.0474D0,  -23.8718D0,   0.0000D0,
&      0.1997D0/
data B1/  376.4322D0, -1223.3635D0,  628.6787D0,  2237.3946D0,
&      -3828.8387D0,  2121.7933D0,  -55.1667D0,  -349.4321D0,
&      92.2059D0/
data B0/  -8.5862D0,   34.1348D0, -116.3287D0,  296.5451D0,
&      -393.4207D0,  237.5497D0,  -30.6000D0,  -27.6170D0,
&      8.8453D0/

```

```

AA2=OD0
AA1=OD0
AA0=OD0
BB1=OD0
BB0=OD0

```

```

CALL FUNCE(X,Ei)
do 10 i = 0, 8
AA2 = AA2 + A2(i)*tau**(i/8.d0)
AA1 = AA1 + A1(i)*tau**(i/8.d0)
AA0 = AA0 + A0(i)*tau**(i/8.d0)
BB1 = BB1 + B1(i)*tau**(i/8.d0)
BB0 = BB0 + B0(i)*tau**(i/8.d0)
10 continue

GIII=AA2*X**2+AA1*X+AA0-DEXP(X)*Ei*(BB1*X+BB0)

return
end

```

```

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
C   Function GIV(x, tau) returns
C   the extreme-relativistic approximation of Pee(x,tau).
C
C   inputs:  7MeV < tau          (tau = kBT/mc^2)
C
CThis extreme-relativistic approximation was obtained by Alexanian (1968).
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

```

```

REAL FUNCTION GIV*8(X,TAU)
IMPLICIT REAL*8 (A-Z)
data pi, emass/ 3.141592654d0, 510.998902d0/
GAM=DEXP(0.5772156649D0)

CON1=3D0/(4D0*PI*SQR(TAU))
A1=28D0/3D0+2D0*X +X**2/2D0
A2= 8D0/3D0+4D0/3D0*X+X**2
A3= 8D0/3D0-4D0/3D0*X+X**2
CALL FUNCE(X,Ei)

Fx=A1+2D0*A2*DLOG(2D0*TAU/GAM)-DEXP(X)*Ei*A3

```

```

      GIV=CON1*Fx
RETURN
END

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
C   Function FCC(x, tau) returns the fitting function of
C   the Colomb correction with the use of the Elwert factor.
C
C   FCC(x, tau) = 1 + p(tau)*x^(2/8) + q(tau)*x^(3/8)
C                   + r(tau)*x^(4/8) + s(tau)*x^(5/8)
C                   + t(tau)*x^(6/8)
C
C   p(tau) = p0/sqrt(tau) + p1*tau^(1/6) + p2*tau^(2/6) + p3*tau^(3/6)
C                   + p4*tau^(4/6) + p5*tau^(5/6)
C
C   Same function forms for q(tau), r(tau), s(tau) and t(tau).
C
C   inputs:  1keV < tau < 300keV (tau = kBT/mc^2)
C            10^-4 < x < 10      (x = kc/tau)
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

      real function FCC*8(x, tau)
      implicit real*8 (a-h, o-z)
      real*8 p(0:6), q(0:6), r(0:6), s(0:6), t(0:6)
data pi, emass/ 3.141592654d0, 510.998902d0/
data p/   -5.7752D0,   46.2097D0,  -160.7280D0,
*         305.0070D0,  -329.5420D0,  191.0770D0,  -46.2718D0/
data q/   30.5586D0,  -248.2177D0,  874.1964D0,
*         -1676.9028D0,  1828.8677D0, -1068.9366D0,  260.5656D0/
data r/   -54.3272D0,  450.9676D0, -1616.5987D0,
*         3148.1061D0, -3478.3930D0,  2055.6693D0, -505.6789D0/
data s/   36.2625D0,  -310.0972D0,  1138.0531D0,
*         -2260.8347D0,  2541.9361D0, -1525.2058D0,  380.0852D0/
data t/   -8.4082D0,  74.7925D0,  -282.9540D0,
*         576.3930D0,  -661.9390D0,  404.2930D0, -102.2330D0/

      ptau =0D0
      qtau =0D0
      rtau =0D0
      stau =0D0
      ttau =0D0

do 10 i = 0, 6
ptau = ptau + p(i)*tau**(i/6.d0)
qtau = qtau + q(i)*tau**(i/6.d0)
rtau = rtau + r(i)*tau**(i/6.d0)
stau = stau + s(i)*tau**(i/6.d0)
ttau = ttau + t(i)*tau**(i/6.d0)
10 continue

      FCC = 1.d0 + ptau*x**(2.d0/8.d0) + qtau*x**(3.d0/8.d0)
*         + rtau*x**(4.d0/8.d0) + stau*x**(5.d0/8.d0)
*         + ttau*x**(6.d0/8.d0)

      return

```

```

end

SUBROUTINE FUNCF(Ifin,N)
IMPLICIT NONE
REAL*8 N,I,Ifin
N=1D0
DO 10 I=1D0,Ifin
N=N*I
10 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE FUNCE(X,Ei)
IMPLICIT NONE
REAL*8 ANS,Ei,GAM
REAL*8 T1,T2
REAL*8 A1,A2,A3
REAL*8 X,T,F
REAL*8 M,N
REAL*8 XT,WT
INTEGER iNT,iXT
DIMENSION XT(20),WT(20)
DATA GAM / 0.57721566490153286060D0 /
DATA XT /0.005396838D0,0.028303937D0,0.069040301D0,0.127034037D0,
& 0.201908993D0,0.293890939D0,0.404249262D0,0.535818423D0,
& 0.693715292D0,0.886478749D0,1.128058627D0,1.44151356D0 ,
& 1.866303878D0,2.473721274D0,3.402622768D0,4.952726389D0,
& 7.871906009D0,14.48429371D0,35.33077428D0,185.2936858D0/
DATA WT /0.013834412D0,0.031913834D0,0.049457133D0,0.066460888D0,
& 0.083319379D0,0.100847649D0,0.120329957D0,0.143643116D0,
& 0.173542463D0,0.214251752D0,0.272638839D0,0.360614529D0,
& 0.500321925D0,0.736334738D0,1.167598113D0,2.043782594D0,
& 4.118375485D0,10.37584757D0,39.8368777D0 ,474.9872281D0/

```

```

ANS=OD0
A1=OD0
A3=OD0
IF (X.le.1D0) THEN
A1=GAM
A2=DLOG(X)
DO 110 M=1D0,18D0
CALL FUNCF(M,N)
A3=A3+(-X)**M/(N*M)
110 CONTINUE
ANS=A1+A2+A3
Ei=ANS
ELSE
iNT=20
T1=OD0
T2=1D30
DO 100 iXT=1,iNT
T=XT(iXT)
F=DEXP(-T)/(T+X)
ANS=ANS+F*WT(iXT)
100 CONTINUE
Ei=-DEXP(-X)*ANS
END IF

```


RETURN
END

付録G Emissivity Fitting 計算プログラム

```
PROGRAM MAIN
    implicit real*8 (a-h, o-z)

    write(*,*)'-----'
    write(*,*)'Dimensionless Input:'
    write(*,*)'tau = kBT/mc^2 (50eV < kBT)      : the electron
        &thermal energy in units of the electron rest mass'
    write(*,*)'-----'
    100 write(*,*)'tau = ?'
    read(*,*) tau

    CALL FUNCfX(TAU,Weefit)

    write(*,*)'Weefit =',Weefit
    write(*,*)'-----'
    GOTO 100
    END

SUBROUTINE FUNCfX(TAU,Weefit)
    IMPLICIT REAL*8 (A-Z)
    data pi, emass/ 3.141592654d0, 510.998902d0/

    IF (TAU.ge.(0.05D0/emass).and.TAU.lt.(1D0/emass)) THEN
        G=GI(tau)
    ELSE IF (TAU.ge.(1D0/emass).and.TAU.lt.(300D0/emass)) THEN
        G=GII(tau)
    ELSE IF (TAU.ge.(300D0/emass).and.TAU.le.(700D0/emass)) THEN
        G=GIII(tau)
    ELSE IF (TAU.gt.(700D0/emass)) THEN
        G=GIV(tau)
    END IF

    Weefit=1.192D-22*DSQRT(TAU)**3*G

    RETURN
    END

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
C    Function GI(tau) returns the fitting function of Wee(x,tau).
C
C    GI(x, tau) = DSQRT( 8D0 / (3D0*PI) ) * Jfit
C
C    inputs: 50eV < tau < 1keV (tau = KbT/mc^2)
C
CThis analytic fitting formula was obtained by Itoh, Kawana & Nozawa (2002a).
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

```

REAL FUNCTION GI*8(TAU)
IMPLICIT REAL*8 (A-Z)
  real*8 b(1:11)
  data b/
    $      2.21564D0 , 1.83879D-1,-1.33575D-1, 5.89871D-2,
    $     -1.45904D-2,-7.10244D-4, 2.80940D-3,-1.70485D-3,
    $      5.26075D-4, 9.94159D-5,-1.06851D-4/
data pi, emass/ 3.141592654d0, 510.998902d0/
logth=LOG10(TAU)
  theta=(logth+2.65d0)/1.35d0
  jfit= b( 1)
  *   +b( 2)*theta
  *   +b( 3)*theta** 2d0
  *   +b( 4)*theta** 3d0
  *   +b( 5)*theta** 4d0
  *   +b( 6)*theta** 5d0
  *   +b( 7)*theta** 6d0
  *   +b( 8)*theta** 7d0
  *   +b( 9)*theta** 8d0
  *   +b(10)*theta** 9d0
  *   +b(11)*theta**10d0

GI=DSQRT(8D0/(3D0*PI))*jfit

  return
end

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
C   Function GII(tau) returns the fitting function of Wee(x,tau).
C
C   GII(tau) =   G0+G1+G2
C
C G0=2D0*AA(2)+AA(1)+AA(0)+0.5D0*BB(1)+BB(0)
C G1=G1+GAM  *AA(i)*CC(j)  sum for i= 0 to 8, j= 2 to 6
C G2=G2+GAM/Z*BB(i)*CC(j)  sum for i= 0 to 8, j= 2 to 6
C GAM is FUNCTION of GAMMA : GAMMA(Z), Z=i+j/8D0+1D0
C
C   AA2(tau) = A2(0) + A2(1)*tau^(1/8) + A2(2)*tau^(2/8) + A2(3)*tau^(3/8)
C               + A2(4)*tau^(4/8) + A2(5)*tau^(5/8) + A2(6)*tau^(6/8)
C               + A2(7)*tau^(7/8) + A2(8)*tau^(8/8)
C
C   Same function forms for AA1(tau), AA0(tau), BB1(tau) and BB0(tau).
C
C   inputs: 1keV < tau < 300keV (tau = KbT/mc^2)
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

  real function GII*8(tau)
  implicit real*8 (a-h, o-z)
  real*8  A2(0:8),  A1(0:8),  A0(0:8),  B1(0:8),  B0(0:8)
  real*8  C6(0:8),  C5(0:8),  C4(0:8),  C3(0:8),  C2(0:8)
  real*8  AA(0:2),  BB(0:2),  CC(2:6)
data A2/    0.9217D0,   -13.4988D0,   76.4539D0,   -217.8301D0,
&          320.9753D0,  -188.0667D0,  -82.4161D0,   163.7191D0,
&          -60.0248D0/
data A1/   -9.3647D0,   95.9186D0,  -397.0172D0,   842.9376D0,
&          -907.3076D0,  306.8802D0,  291.2983D0,  -299.0253D0,

```

```

&          76.3461D0/
data A0/   -37.3698D0,   380.3659D0, -1489.8014D0,  2861.4150D0,
&          -2326.3704D0, -691.6118D0,  2853.7893D0, -2040.7952D0,
&          492.5981D0/
data B1/   -8.6991D0,   63.3830D0, -128.8939D0, -135.0312D0,
&          977.5838D0, -1649.9529D0,  1258.6812D0, -404.7461D0,
&          27.3354D0/
data B0/   -11.6281D0,  125.6066D0, -532.7489D0,  1142.3873D0,
&          -1156.8545D0,   75.0102D0,   996.8114D0, -888.1895D0,
&          250.1386D0/
data C2/   -5.7752D0,   46.2097D0, -160.7280D0,   305.0070D0,
&          -329.5420D0,  191.0770D0, -46.2718D0,   0.0000D0,
&          0.0000D0/
data C3/   30.5586D0, -248.2177D0,   874.1964D0, -1676.9028D0,
&          1828.8677D0, -1068.9366D0,   260.5656D0,   0.0000D0,
&          0.0000D0/
data C4/   -54.3272D0,  450.9676D0, -1616.5987D0,  3148.1061D0,
&          -3478.3930D0,  2055.6693D0, -505.6789D0,   0.0000D0,
&          0.0000D0/
data C5/   36.2625D0, -310.0972D0,  1138.0531D0, -2260.8347D0,
&          2541.9361D0, -1525.2058D0,   380.0852D0,   0.0000D0,
&          0.0000D0/
data C6/   -8.4082D0,   74.7925D0, -282.9540D0,   576.3930D0,
&          -661.9390D0,  404.2930D0, -102.2330D0,   0.0000D0,
&          0.0000D0/

```

```

AA=OD0
BB=OD0
CC=OD0

```

```

do 100 i = 0, 8
AA(2) = AA(2) + A2(i)*tau**(i/8.d0)
AA(1) = AA(1) + A1(i)*tau**(i/8.d0)
AA(0) = AA(0) + A0(i)*tau**(i/8.d0)
BB(1) = BB(1) + B1(i)*tau**(i/8.d0)
BB(0) = BB(0) + B0(i)*tau**(i/8.d0)
CC(6) = CC(6) + C6(i)*tau**(i/6.d0)
CC(5) = CC(5) + C5(i)*tau**(i/6.d0)
CC(4) = CC(4) + C4(i)*tau**(i/6.d0)
CC(3) = CC(3) + C3(i)*tau**(i/6.d0)
CC(2) = CC(2) + C2(i)*tau**(i/6.d0)
100 continue

```

```

GO=OD0
G1=OD0
G2=OD0

```

```

do 200 Xi = OD0, 2D0
i=idint(Xi)
do 210 Xj = 2D0, 6D0
j=idint(Xj)
Z=Xi+Xj/8D0+1D0
CALL GAMMAFUNC(Z,GAM)
G1=G1+GAM *AA(i)*CC(j)
G2=G2+GAM/Z*BB(i)*CC(j)
210 continue
200 continue

```

```
GO=2D0*AA(2)+AA(1)+AA(0)+0.5D0*BB(1)+BB(0)
```

```
GII=G0+G1+G2
```

```
return  
end
```

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

```
C  
C Function GIII(tau) returns the fitting function of Wee(x,tau).  
C  
C GIII(tau) = 2D0*AA(2)+AA(1)+AA(0)+0.5D0*BB(1)+BB(0)  
C  
C AA(2) = A2(0) + A2(1)*tau^(1/8) + A2(2)*tau^(2/8) + A2(3)*tau^(3/8)  
C + A2(4)*tau^(4/8) + A2(5)*tau^(5/8) + A2(6)*tau^(6/8)  
C + A2(7)*tau^(7/8) + A2(8)*tau^(8/8)  
C  
C Same function forms for AA(1), AA(0), BB(1) and BB(0).  
C  
C inputs: 300keV < tau < 7MeV (tau = kBT/mc^2)  
C
```

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

```
real function GIII*8(tau)  
implicit real*8 (a-h, o-z)  
real*8 A2(0:8), A1(0:8), A0(0:8), B1(0:8), B0(0:8)  
real*8 AA(0:2), BB(0:1)  
data A2/ 64.7512D0, -213.8956D0, 174.1432D0, 136.5088D0,  
& -271.4899D0, 89.3210D0, 58.2584D0, -46.0807D0,  
& 8.7301D0/  
data A1/ 49.7139D0, -189.7746D0, 271.0298D0, -269.7807D0,  
& 420.4812D0, -576.6247D0, 432.7790D0, -160.5365D0,  
& 23.3925D0/  
data A0/ 52.1633D0, -257.0313D0, 446.8161D0, -293.0585D0,  
& 0.0000D0, 77.0474D0, -23.8718D0, 0.0000D0,  
& 0.1997D0/  
data B1/ 376.4322D0, -1223.3635D0, 628.6787D0, 2237.3946D0,  
& -3828.8387D0, 2121.7933D0, -55.1667D0, -349.4321D0,  
& 92.2059D0/  
data B0/ -8.5862D0, 34.1348D0, -116.3287D0, 296.5451D0,  
& -393.4207D0, 237.5497D0, -30.6000D0, -27.6170D0,  
& 8.8453D0/
```

```
AA(2)=0D0  
AA(1)=0D0  
AA(0)=0D0  
BB(1)=0D0  
BB(0)=0D0
```

```
do 100 i = 0, 8  
AA(2) = AA(2) + A2(i)*tau**(i/8.d0)  
AA(1) = AA(1) + A1(i)*tau**(i/8.d0)  
AA(0) = AA(0) + A0(i)*tau**(i/8.d0)  
BB(1) = BB(1) + B1(i)*tau**(i/8.d0)  
BB(0) = BB(0) + B0(i)*tau**(i/8.d0)  
100 continue
```

```
GO=2D0*AA(2)+AA(1)+AA(0)+0.5D0*BB(1)+BB(0)
```

GIII=GO

```
    return
end
```

CC

```
C
C   Function GIV(tau) returns
C   the extreme-relativistic approximation of Wee(x,tau).
C
C   inputs:  7MeV < tau          (tau = kBT/mc^2)
C
CThis extreme-relativistic approximation was obtained by Alexanian (1968).
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

```
REAL FUNCTION GIV*8(TAU)
IMPLICIT REAL*8 (A-Z)
data pi, emass/ 3.141592654d0, 510.998902d0/
GUM=DEXP(0.5772156649D0)
CON1=9D0/PI/DSQRT(TAU)
Gt=DLOG(2D0*TAU/GUM)+5D0/4D0
```

GIV=CON1*Gt

```
    return
end
```

```
c-----c
c
c   gamma function (input)
c
c-----c
```

```
SUBROUTINE GAMMAFUNC(Z,gamma)
REAL*8 Z,gamma
INTEGER i
```

```
CALL re_gamma_init
CALL re_gamma_func(gamma , z )
```

```
RETURN
END
```

```
    subroutine re_gamma_init
c-----c
c
c   gamma function (initialization)
c
c-----c
c
c   implicit none
c*
c*
c   real*8    b2n    , pi
c   integer*4 ic
c*
```

```

real*8    cc    , ln2pi2, pi2
integer*4  n_08
parameter (n_08 = 8)
common / re_gam / cc(n_08), ln2pi2, pi2
c*
c*
dimension  b2n(n_08)
c*
c*
c*  ----- setting the Bernoulli  $\frac{B_n}{n!}$  s number -----
c*
b2n(1) =    1.d0/   6.d0
b2n(2) =   -1.d0/  30.d0
b2n(3) =    1.d0/  42.d0
b2n(4) =   -1.d0/  30.d0
b2n(5) =    5.d0/  66.d0
b2n(6) =  -691.d0/2730.d0
b2n(7) =    7.d0/   6.d0
b2n(8) = -3617.d0/ 510.d0
c*
c*
do ic = 1, n_08
    cc(ic) = b2n(ic)/dble(2*ic*(2*ic-1))
end do
c*
c*
pi    = acos(-1.d0)
pi2   = 2.d0*pi
ln2pi2 = log(pi2)/2.d0
c*
c*
return
end

subroutine re_gamma_func(gamma , z    )
c-----c
c                                           c
c    gamma function                               c
c                                           c
c-----c
c
implicit none
c*
c*
real*8 gamma , z
real*8 loggam, zz    , norm , one
c*
c*
one = 1.d0
norm = one
zz = z
c*
c*  ----- setting Re(zz) > 10 -----
call re_gamma_norm (zz    , norm , one )
c*
c*  ----- setting log(gamma) -----
call re_gamma_log (loggam, zz    )

```

```

c*
c* ----- setting gamma(z) -----
c* call re_gamma_value(gamma , loggam, norm )
c*
c*
c* return
c* end
c*
c* subroutine re_gamma_norm(zz , norm , one )
c-----c
c c
c normalization factor c
c c
c-----c
c
c implicit none
c*
c*
c* real*8 zz , norm , one
c* real*8 rr , cut_v1
c* parameter (cut_v1 = 10.d0)
c* integer*4 icount, mxloop
c* parameter (mxloop = 1250)
c*
c*
c* icount = 0
10 continue
c* icount = icount + 1
c* rr = zz
c* if (rr .lt. cut_v1)
1 then
c* norm = norm/zz
c* zz = zz + one
c* if (icount .lt. mxloop) go to 10
c* write(6,9000) icount, zz
c* stop 99
c* end if
c*
c*
c* return
9000 format('program error at gamma_norm(icount, zz) :',/,
1 i6,1p6e12.4)
c* end
c*
c* subroutine re_gamma_log(ln , z )
c-----c
c c
c log(gamma) c
c c
c-----c
c
c implicit none
c*
c*
c* real*8 ln , z
c* real*8 z1 , z2 , v1 , v2
c*
c*
c* real*8 cc , ln2pi2, pi2

```



```

integer*4 n_08
parameter (n_08 = 8)
common / re_gam / cc(n_08), ln2pi2, pi2
c*
c*
z1 = 1.d0/z
z2 = z1*z1
v2 = ((((((cc(8)*z2 + cc(7))*z2 + cc(6))*z2 + cc(5))*z2
1 + cc(4))*z2 + cc(3))*z2 + cc(2))*z2 + cc(1))*z1
v1 = (z - 0.5d0)*log(z) - z + ln2pi2
ln = v1 + v2
c*
c*
return
end

subroutine re_gamma_value(gm , ln , norm )
c-----c
c c
c log(gamma) c
c c
c-----c
c
implicit none
c*
c*
real*8 gm , ln , norm
real*8 z1 , z2
c*
real*8 cc , ln2pi2, pi2
integer*4 n_08
parameter (n_08 = 8)
common / re_gam / cc(n_08), ln2pi2, pi2
c*
c*
z1 = ln
z2 = exp(z1)
gm = norm*z2
c*
c*
return
end

subroutine re_log_gamma_func(gamma , z )
c-----c
c c
c gamma function c
c c
c-----c
c
implicit none
c*
c*
real*8 gamma , z
real*8 loggam, zz , norm , one
c*
c*
one = 1.d0

```

```

norm = one
zz = z

c*
c* ----- setting Re(zz) > 10 -----
call re_gamma_norm (zz , norm , one )

c*
c* ----- setting log(gamma) -----
call re_gamma_log (loggam, zz )

c*
c* ----- setting gamma(z) -----
call re_log_gamma_value(gamma , loggam, norm )

c*
c*
return
end

subroutine re_log_gamma_value(gm , ln , norm )
c-----c
c c c
c log(gamma) c c
c c c
c-----c
c
implicit none

c*
c*
real*8 gm , ln , norm

c*
c* gm = ln + log(norm)

c*
c*
return
end

```